1章　確率

BASIC

29 $P(A)=\frac{7}{52}$，$P(B)=\frac{12}{52}=\frac{4}{13}$，$P(A\cap B)=\frac{3}{52}$

以上より

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{52}}{\frac{7}{52}}=\boldsymbol{\frac{3}{7}}$$

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{52}}{\frac{4}{13}}=\boldsymbol{\frac{3}{16}}$$

30（1）$P(A)=\frac{3}{6}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

（2）　※ 目の出方を，(大の目, 小の目) で表す．

大きいさいころの目が奇数（3 通り）のとき，目の出方の総数は 3×6 通りであり，出る目の和が 8 になるのは，(3, 5), (5, 3) の 2 通りだから

$P_A(B)=\frac{2}{3\times 6}=\boldsymbol{\frac{1}{9}}$

（3）

$$P(A\cap B)=P(A)P_A(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}=\boldsymbol{\frac{1}{18}}$$

31　会員を 1 人選んだとき，野球が好きである事象を A，サッカーが好きである事象を B，テニスが好きである事象を C とすると

$P(A)=\frac{50}{100}$，$P_A(B)=\frac{60}{100}$，$P_{A\cap B}(C)=\frac{80}{100}$

$P_{A\cap B}(C)=\frac{80}{100}$ より，$P_{A\cap B}(\overline{C})=\frac{20}{100}$

よって，

$$P(A\cap B\cap\overline{C})=P(A)P_A(B)P_{A\cap B}(\overline{C})=\frac{50}{100}\times\frac{60}{100}\times\frac{20}{100}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{5}=\boldsymbol{\frac{3}{50}}$$

32（1）当たりくじを○，はずれくじを×で表すと，A，B，C のくじの引き方で，C が当たるのは

○×○
×○○
××○

それぞれの確率は，上から順に

$\frac{2}{20}\times\frac{18}{19}\times\frac{1}{18}$

$\frac{18}{20}\times\frac{2}{19}\times\frac{1}{18}$

$\frac{18}{20}\times\frac{17}{19}\times\frac{2}{18}$

よって，求める確率は

$$\frac{2}{20}\times\frac{18}{19}\times\frac{1}{18}+\frac{18}{20}\times\frac{2}{19}\times\frac{1}{18}+\frac{18}{20}\times\frac{17}{19}\times\frac{2}{18}$$

$$=\frac{2\cdot 18+2\cdot 18+2\cdot 18\cdot 17}{20\cdot 19\cdot 18}$$

$$=\frac{2\cdot 18(1+1+17)}{20\cdot 19\cdot 18}$$

$$=\frac{2\cdot 18\cdot 19}{20\cdot 19\cdot 18}=\frac{2}{20}=\boldsymbol{\frac{1}{10}}$$

（2）　A，B，C がこの順にくじを引くときの，引き方の総数は，${}_{20}\mathrm{P}_3$ 通り．

C が当たる場合の A，B，C のくじの引き方は，前問と同様に

○×○
×○○
××○

それぞれの場合の数は，上から順に

$2\times 18\times 1$

$18\times 2\times 1$

$18\times 17\times 2$

よって，C が当たる場合の総数は

$$2\times 18\times 1+18\times 2\times 1+18\times 17\times 2$$

$$=2\cdot 18(1+1+17)$$

$$=2\cdot 18\cdot 19$$

したがって，求める確率は

$$\frac{2\cdot 18\cdot 19}{{}_{20}\mathrm{P}_3}=\frac{2\cdot 18\cdot 19}{20\cdot 19\cdot 18}=\frac{2}{20}=\boldsymbol{\frac{1}{10}}$$

33　1 から 300 まで 3 の倍数の個数は，$300\div 3=100$ より，

$3\times 1=3$

$3\times 2=6$

$\cdots$

$3\times 100=300$

の 100 個だから，

$P(A)=\frac{100}{300}=\frac{1}{3}$

1 から 300 まで 5 の倍数の個数は，$300\div 5=60$ より，

$5\times 1=5$

$5\times 2=10$

$\cdots$

$5\times 60=300$

の 60 個だから，

$P(B)=\frac{60}{300}=\frac{1}{5}$

また，$A\cap B$ は，選んだ数が 15 の倍数であるという事象である．

1 から 300 まで 15 の倍数の個数は，$300\div 15=20$ より，

$15\times 1=15$

$15\times 2=30$

$\cdots$

$15\times 20=300$

の 20 個だから，

$P(A\cap B)=\frac{20}{300}=\frac{1}{15}$

以上より，$P(A)P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{15}=P(A\cap B)$ であるから，

A と B は**互いに独立である．**

1 から 400 まで 3 の倍数の個数は，$400\div 3=133.3\cdots$ より，

$3\times 1=3$

$3\times 2=6$

$\cdots$

$3\times 133=399$

の 133 個だから，

$P(A)=\frac{133}{400}$

1 から 400 まで 5 の倍数の個数は，$400\div 5=80$ より，

$5 \times 1 = 5$
$5 \times 2 = 10$
$\cdots$
$5 \times 80 = 400$

の 80 個だから，

$P(B) = \dfrac{80}{400} = \dfrac{1}{5}$

1 から 400 まで 15 の倍数の個数は，$400 \div 15 = 26.6\cdots$ より，

$15 \times 1 = 15$
$15 \times 2 = 30$
$\cdots$
$15 \times 26 = 390$

の 26 個だから，

$P(A \cap B) = \dfrac{26}{400}$

よって，

$P(A)P(B) = \dfrac{133}{400} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{133}{2000}$

であるから，$P(A \cap B) \fallingdotseq P(A)P(B)$ となり，A と B は**互いに独立ではない．**

34　1 回だけ赤であるような玉の取り出し方は

赤白白
白赤白
白白赤

であり，それぞれ互いに排反である．

（1）　取り出し方に対するそれぞれの確率は

$\dfrac{3}{10} \times \dfrac{7}{10} \times \dfrac{7}{10}$
$\dfrac{7}{10} \times \dfrac{3}{10} \times \dfrac{7}{10}$
$\dfrac{7}{10} \times \dfrac{7}{10} \times \dfrac{3}{10}$

であるから，求める確率は

$$\dfrac{3}{10} \times \dfrac{7}{10} \times \dfrac{7}{10} \times 3 = \dfrac{3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3}{10^3} = \mathbf{\dfrac{441}{1000}}$$

（2）　取り出し方に対するそれぞれの確率は

$\dfrac{3}{10} \times \dfrac{7}{9} \times \dfrac{6}{8}$
$\dfrac{7}{10} \times \dfrac{3}{9} \times \dfrac{6}{8}$
$\dfrac{7}{10} \times \dfrac{6}{9} \times \dfrac{3}{8}$

であるから，求める確率は

$$\dfrac{3 \cdot 7 \cdot 6}{10 \cdot 9 \cdot 8} \times 3 = \mathbf{\dfrac{21}{40}}$$

35　A チームが先攻になる確率は $\dfrac{1}{2}$，B チームが先攻になる確率は $\dfrac{1}{2}$ であるから，求める確率は

$$\begin{aligned} {}_{10}\mathrm{C}_6 \left(\dfrac{1}{2}\right)^6 \left(\dfrac{1}{2}\right)^4 &= {}_{10}\mathrm{C}_4 \left(\dfrac{1}{2}\right)^{10} \\ &= \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \times \dfrac{1}{2^{10}} \\ &= 210 \times \dfrac{1}{1024} = \mathbf{\dfrac{105}{512}} \end{aligned}$$

36　さいころを 5 回投げ，1 または 2 の目が k 回出る事象を A_k とする．また，1 または 2 の目が出る確率は，$\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

（1）　求める確率は，

$$\begin{aligned} P(A_4) &= {}_5\mathrm{C}_4 \left(\dfrac{1}{3}\right)^4 \left(\dfrac{2}{3}\right)^1 = {}_5\mathrm{C}_1 \times \dfrac{2}{3^5} \\ &= 5 \times \dfrac{2}{243} = \mathbf{\dfrac{10}{243}} \end{aligned}$$

（2）　この事象は，A_5 の余事象である．

$$\begin{aligned} P(A_5) &= {}_5\mathrm{C}_5 \left(\dfrac{1}{3}\right)^5 \\ &= 1 \times \dfrac{1}{243} = \dfrac{1}{243} \end{aligned}$$

よって，求める確率は

$$1 - \dfrac{1}{243} = \mathbf{\dfrac{242}{243}}$$

37　選んだ生徒が自宅に住んでいるという事象を A_1，自宅以外に住んでいるという事象を A_2，自転車通学であるという事象を B とすると

$P(A_1) = \dfrac{45}{100}$，　$P(A_2) = \dfrac{55}{100}$

$P_{A_1}(B) = \dfrac{70}{100}$，　$P_{A_2}(B) = \dfrac{60}{100}$

求める確率は $P_B(A_1)$ であるから，ベイズの定理より

$$\begin{aligned} P_B(A_1) &= \dfrac{\dfrac{45}{100} \times \dfrac{70}{100}}{\dfrac{45}{100} \times \dfrac{70}{100} + \dfrac{55}{100} \times \dfrac{60}{100}} \\ &= \dfrac{45 \times 70}{45 \times 70 + 55 \times 60} \\ &= \dfrac{9 \times 7}{9 \times 7 + 11 \times 6} \\ &= \dfrac{3 \times 7}{3 \times 7 + 11 \times 2} \\ &= \dfrac{21}{21 + 22} = \mathbf{\dfrac{21}{43}} \end{aligned}$$

38　任意に取り出した 1 個が機械 A，B，C で作られたものであるという事象をそれぞれ A, B, C，不良品であるという事象を D とする．

$P(A) = \dfrac{1500}{1500 + 1200 + 1000} = \dfrac{1500}{3700} = \dfrac{15}{37}$

$P(B) = \dfrac{1200}{3700} = \dfrac{12}{37}$

$P(C) = \dfrac{1000}{3700} = \dfrac{10}{37}$

$P_A(D) = \dfrac{2}{100}$，　$P_B(D) = \dfrac{1.5}{100}$，　$P_C(D) = \dfrac{1}{100}$

（1）

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A)P_A(D) + P(B)P_B(D) + P(C)P_C(D) \\ &= \dfrac{15}{37} \times \dfrac{2}{100} + \dfrac{12}{37} \times \dfrac{1.5}{100} + \dfrac{10}{37} \times \dfrac{1}{100} \\ &= \dfrac{30 + 18 + 10}{37 \times 100} \\ &= \dfrac{58}{37 \times 100} \\ &= \dfrac{29}{37 \times 50} = \mathbf{\dfrac{29}{1850}} \end{aligned}$$

（2）ベイズの定理より

$$\begin{aligned} P_D(A) &= \dfrac{\dfrac{15}{37} \times \dfrac{2}{100}}{\dfrac{29}{1850}} \\ &= \dfrac{\dfrac{15}{37} \times \dfrac{1}{50}}{\dfrac{29}{1850}} = \mathbf{\dfrac{15}{29}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_D(B) &= \dfrac{\dfrac{12}{37} \times \dfrac{1.5}{100}}{\dfrac{29}{1850}} \\ &= \dfrac{\dfrac{6}{37} \times \dfrac{1.5}{50}}{\dfrac{29}{1850}} = \mathbf{\dfrac{9}{29}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P_D(C) &= \frac{\dfrac{10}{37} \times \dfrac{1}{100}}{\dfrac{29}{1850}} \\
&= \frac{\dfrac{5}{37} \times \dfrac{1}{50}}{\dfrac{29}{1850}} = \boldsymbol{\frac{5}{29}}
\end{aligned}
$$

■