3章　行列式

§2　行列式の応用　(p.97〜p.112)

問1

（1）　$与式 = 0\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}$

$= -5(3-4) = \mathbf{5}$

（2）　$与式 = 0\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$+3\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

$= -2(-6-2) + 3\{12-(-4)\}$

$= 16 + 48 = \mathbf{64}$

問2

（1）　$与式 = 0 + (-1)^{3+2}\cdot 4\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 0 + 0$

$= -4\{24+4-(18-8)\}$

$= -4\cdot 18 = \mathbf{-72}$

（2）　$与式 = 0+0+0+(-1)^{4+4}\cdot 2\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

$= 2\{-8-2+12-(-8+12-2)\}$

$= 2\cdot 0 = \mathbf{0}$

問3　それぞれの行列を A とする．

（1）　$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -1 & -7 & 11 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

$= -28+66-1-(11+12+14) = 0$

よって，与えられた行列は**正則ではない．**

（2）　$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix}$

$= -24+3+6-(4-4+27) = -42 \neq 0$

よって，与えられた行列は**正則である．**

小行列式を求めると

$D_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -14$　$D_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -7$

$D_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7$　$D_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -10$

$D_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -17$　$D_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$

$D_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8$　$D_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$D_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5$

以上より

$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -14 & 10 & -8 \\ 7 & -17 & 1 \\ -7 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

よって，$\boldsymbol{A^{-1} = -\frac{1}{42}\begin{pmatrix} -14 & 10 & -8 \\ 7 & -17 & 1 \\ -7 & -1 & 5 \end{pmatrix}}$

問4

（1）　与えられた連立方程式を，行列を用いて表すと

$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$

ここで，$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ とすると

$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 21-(-16) = 37$

また

$\varDelta_1 = \begin{vmatrix} 10 & -4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 70-(-4) = 74$

$\varDelta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3-40 = -37$

よって，クラメルの公式より

$x = \frac{74}{37} = 2,\ \ y = \frac{-37}{37} = -1$

したがって，$\boldsymbol{(x,\ y) = (2,\ -1)}$

（2）　与えられた連立方程式を，行列を用いて表すと

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

ここで，$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ とすると

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -5-4-18-(3+3-40) = 7$

また

$\varDelta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -1-12-(2-10) = -5$

$\varDelta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2+6-(-1+16) = -7$

$\varDelta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -5+8-(-6+3) = 6$

よって，クラメルの公式より

$x = \frac{-5}{7} = -\frac{5}{7},\ \ y = \frac{-7}{7} = -1,\ \ z = \frac{6}{7}$

したがって，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z) = \left(-\frac{5}{7},\ -1,\ \frac{6}{7}\right)}$

問 5

（1）　係数行列の行列式の値が 0 となればよいので

$$\begin{vmatrix} 4 & k \\ 2 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = 4 \cdot \frac{3}{2} - 2k = 0$$

すなわち，$6 - 2k = 0$ であるから，$\boldsymbol{k = 3}$

このときの係数行列を変形すると

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad 2\text{ 行} \times 2$$

$$\to \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 2\text{ 行} - 1\text{ 行}$$

方程式にもどすと，$4x + 3y = 0$

$x = 3t$ とおけば，$y = -4t$

よって，$\boldsymbol{(x,\ y) = (3t,\ -4t)}$　（t は 0 でない任意の数）

（2）　係数行列の行列式の値が 0 となればよいので

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & k \end{vmatrix} = -k + 5 + 16 - (-4 + 2k + 10)$$

$$= -3k + 15 = 0$$

よって，$\boldsymbol{k = 5}$

このときの係数行列を変形すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & -9 & 15 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 2\text{ 行} - 1\text{ 行} \times 2 \\ 3\text{ 行} - 1\text{ 行} \times 5 \end{matrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 2\text{ 行} - 1\text{ 行}$$

方程式にもどすと

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 & \cdots ① \\ -3y + 5z = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

② より，$z = \frac{3}{5}y$

① に代入すると

$x + y - 2 \cdot \frac{3}{5}y = 0$

$5x + 5y - 6y = 0$

$y = 5x$

$x = t$ とおけば，$y = 5t,\ z = \frac{3}{5} \cdot 5t = 3t$

よって，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z) = (t,\ 5t,\ 3t)}$　（t は 0 でない任意の数）

問 6

（1）　与えられた 2 つのベクトルを並べてできる行列の行列式の値を求めると

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5 \fallingdotseq 0$$

よって，**線形独立**である．

（2）　与えられた 3 つのベクトルを並べてできる行列の行列式の値を求めると

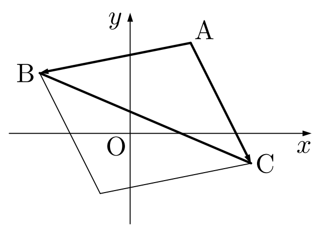
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 2 + 5 - (10 - 1 - 1) = 0$$

よって，**線形従属**である．

問 7

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$



△ABC の面積は，AB，AC を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の面積の半分である．

2 つのベクトルを並べてできる行列の行列式の値を求めると

$$\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 20 - (-2) = 22$$

よって，$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |22| = \boldsymbol{11}$

問 8

3 つのベクトルを並べてできる行列の行列式の値を求めると

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 6 - 8 - (2 + 6 - 4) = -5$$

よって，平行六面体の体積は，$|-5| = \boldsymbol{5}$

■