3章　行列式

BASIC

182（1） 与式 $= 0\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

$= 3\{2-(-3)\} = \mathbf{15}$

（2） 与式 $= 2\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

$+(-1)\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

$= 2\{8+4-(-2)-4\} - 1\cdot(-24+2-6-4)$

$= 2\cdot 10 - (-32)$

$= 20+32 = \mathbf{52}$

183（1） 与式 $= (-1)^{2+1}\cdot(-2)\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0$

$+(-1)^{2+4}\cdot 3\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

$= 2(2+6-9) + 3\{2+6-(-8)-9\}$

$= 2\cdot(-1) + 3\cdot 7$

$= -2+21 = \mathbf{19}$

（2） 与式 $= 0 + (-1)^{2+3}\cdot 4\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

$+(-1)^{3+3}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} + 0$

$= -4(6+12-8) + (6-9-4)$

$= -4\cdot 10 + (-7)$

$= -40-7 = \mathbf{-47}$

184　それぞれの行列を A とする．

（1） $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

$= 18 + (-2) - (4+3)$

$= 16 - 7 = 9 \fallingdotseq 0$

よって，与えられた行列は**正則である．**

小行列式を求めると

$D_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \quad D_{12} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5$

$D_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \quad D_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3$

$D_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \quad D_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$

$D_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 \quad D_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4$

$D_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5$

以上より

$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -2 \\ -5 & 6 & 4 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

よって，$\boldsymbol{A^{-1} = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -3 & -2 \\ -5 & 6 & 4 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}}$

（2） $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

$= -2 + (-4) - (-8+2) = 0$

よって，与えられた行列は**正則ではない．**

（3） $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

$= 18 + 4 - (8+6) = 8 \fallingdotseq 0$

よって，与えられた行列は**正則である．**

小行列式を求めると

$D_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \quad D_{12} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4$

$D_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \quad D_{21} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2$

$D_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \quad D_{23} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$

$D_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6 \quad D_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4$

$D_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 5$

以上より

$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -6 \\ 4 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

よって，$\boldsymbol{A^{-1} = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 6 & 2 & -6 \\ 4 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}}$

185（1） 与えられた連立方程式を，行列を用いて表すと

$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

ここで，$A=\begin{pmatrix}2&4\\3&2\end{pmatrix}$ とすると

$$|A|=\begin{vmatrix}2&4\\3&2\end{vmatrix}=4-12=-8$$

また

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}5&4\\1&2\end{vmatrix}=10-4=6$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2&5\\3&1\end{vmatrix}=2-15=-13$$

よって，クラメルの公式より

$x=\dfrac{6}{-8}=-\dfrac{3}{4}$，$y=\dfrac{-13}{-8}=\dfrac{13}{8}$

したがって，$\boldsymbol{(x,\ y)=\left(-\dfrac{3}{4},\ \dfrac{13}{8}\right)}$

（2）　与えられた連立方程式を，行列を用いて表すと

$$\begin{pmatrix}1&3&2\\2&-2&1\\2&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

ここで，$A=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&-2&1\\2&1&-1\end{pmatrix}$ とすると

$$|A|=\begin{vmatrix}1&3&2\\2&-2&1\\2&1&-1\end{vmatrix}=2+6+4-(1-6-8)=25$$

また

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}1&3&2\\2&-2&1\\1&1&-1\end{vmatrix}=2+3+4-(1-6-4)=18$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&1&2\\2&2&1\\2&1&-1\end{vmatrix}=-2+2+4-(1-2+8)=-3$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1&3&1\\2&-2&2\\2&1&1\end{vmatrix}=-2+12+2-(2+6-4)=8$$

よって，クラメルの公式より

$x=\dfrac{18}{25}$，$y=\dfrac{-3}{25}=-\dfrac{3}{25}$，$z=\dfrac{8}{25}$

したがって，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=\left(\dfrac{18}{25},\ -\dfrac{3}{25},\ \dfrac{8}{25}\right)}$

（3）　与えられた連立方程式を，行列を用いて表すと

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&5\\1&5&12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

ここで，$A=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&-2&1\\2&1&-1\end{pmatrix}$ とすると

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\1&3&5\\1&5&12\end{vmatrix}$$

$$=36+10+15-(25+24+9)=3$$

また

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}0&2&3\\0&3&5\\1&5&12\end{vmatrix}=10-9=1$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&0&3\\1&0&5\\1&1&12\end{vmatrix}=3-5=-2$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1&2&0\\1&3&0\\1&5&1\end{vmatrix}=3-2=1$$

よって，クラメルの公式より

$x=\dfrac{1}{3}$，$y=\dfrac{-2}{3}=-\dfrac{2}{3}$，$z=\dfrac{1}{3}$

したがって，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=\left(\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)}$

（4）　与えられた連立方程式を，行列を用いて表すと

$$\begin{pmatrix}1&-1&3\\2&3&-4\\3&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\\6\end{pmatrix}$$

ここで，$A=\begin{pmatrix}1&-1&3\\2&3&-4\\3&-2&1\end{pmatrix}$ とすると

$$|A|=\begin{vmatrix}1&-1&3\\2&3&-4\\3&-2&1\end{vmatrix}$$

$$=3+12-12-(8-2+27)=-30$$

また

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}2&-1&3\\5&3&-4\\6&-2&1\end{vmatrix}$$

$$=6+24-30-(16-5+54)=-65$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&5&-4\\3&6&1\end{vmatrix}$$

$$=5-24+36-(-24+4+45)=-8$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1&-1&2\\2&3&5\\3&-2&6\end{vmatrix}$$

$$=18-15-8-(-10-12+18)=-1$$

よって，クラメルの公式より

$x=\dfrac{-65}{-30}=\dfrac{13}{6}$，$y=\dfrac{-8}{-30}=\dfrac{4}{15}$，$z=\dfrac{-1}{-30}=\dfrac{1}{30}$

したがって，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=\left(\dfrac{13}{6},\ \dfrac{4}{15},\ \dfrac{1}{30}\right)}$

186（1）　係数行列の行列式の値が 0 となればよいので

$$\begin{vmatrix}k&10\\2&5\end{vmatrix}=5k-20=0$$

よって，$\boldsymbol{k=4}$

このときの係数行列を変形すると

$$\begin{pmatrix}4&10\\2&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&5\\2&5\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}2&5\\0&0\end{pmatrix}$$

方程式にもどすと，$2x+5y=0$

$x=5t$ とおけば，$10t+5y=0$ より，$y=-2t$

よって，$\boldsymbol{(x,\ y)=(5t,\ -2t)}$　（t は 0 でない任意の数）

（2）　係数行列の行列式の値が 0 となればよいので

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \\ 4 & k & 2 \end{vmatrix} = 2-8-9k-(k+12+12)$$
$$= -10k-30 = 0$$

よって，$\boldsymbol{k = -3}$

このときの係数行列を変形すると

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & 5 & -10 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

方程式にもどすと

$$\begin{cases} x-2y+3z=0 & \cdots ① \\ y-2z=0 & \cdots ② \end{cases}$$

② より，$y = 2z$

① に代入すると

$x - 4z + 3z = 0$

$x = z$

$x = t$ とおけば，$z = t,\ y = 2t$

よって，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z) = (t,\ 2t,\ t)}$　(t は 0 でない任意の数)

187（1）　与えられた 2 つのベクトルを並べてできる行列の行列式の値を求めると

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6-(-2) = 8 \fallingdotseq 0$$

よって，**線形独立**である．

（2）　与えられた 2 つのベクトルを並べてできる行列の行列式の値を求めると

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -6 & -9 \end{vmatrix} = -18-(-18) = 0$$

よって，**線形従属**である．

（3）　与えられた 3 つのベクトルを並べてできる行列の行列式の値を求めると

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 12-2-12-(3+12+8)$$
$$= -25 \fallingdotseq 0$$

よって，**線形独立**である．

（4）　与えられた 3 つのベクトルを並べてできる行列の行列式の値を求めると

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -15+2-(-12-1) = 0$$

よって，**線形従属**である．

188（1）A(3, 4)，B(−2, 2)，C(5, −2) とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

この 2 つのベクトルを並べてできる行列の行列式の値を求めると

$$\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = 30-(-4) = 34$$

よって，$\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot |34| = \mathbf{17}$

（2）A(−4, −1)，B(−2, 3)，C(3, 0) とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

この 2 つのベクトルを並べてできる行列の行列式の値を求めると

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2-28 = -26$$

よって，$\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot |-26| = \mathbf{13}$

189（1）　3 つのベクトルを並べてできる行列の行列式の値を求めると

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3-4-4-(4-12-1) = 4$$

よって，平行六面体の体積は，$|4| = \mathbf{4}$

（2）　3 つのベクトルを並べてできる行列の行列式の値を求めると

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -12-4+6-(8+18+2) = -38$$

よって，平行六面体の体積は，$|-38| = \mathbf{38}$

CHECK

190（1）与式

$$= -1\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= -(0-4)+2(6-0)$$
$$= 4+12 = \mathbf{16}$$

（2）与式

$$= -2\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$-0\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= -2(2-0)-3\{2-(8-1)\}$$
$$= -4-3\cdot(-5)$$
$$= -4+15 = \mathbf{11}$$

191　それぞれの行列を A とする．

（1）

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 8-(-8) = 16$$

小行列式を求めると

$$D_{11}=\begin{vmatrix}4&0\\0&1\end{vmatrix}=4\quad D_{12}=\begin{vmatrix}0&0\\-2&1\end{vmatrix}=0$$

$$D_{13}=\begin{vmatrix}0&4\\-2&0\end{vmatrix}=8\quad D_{21}=\begin{vmatrix}0&1\\0&1\end{vmatrix}=0$$

$$D_{22}=\begin{vmatrix}2&1\\-2&1\end{vmatrix}=4\quad D_{23}=\begin{vmatrix}2&0\\-2&0\end{vmatrix}=0$$

$$D_{31}=\begin{vmatrix}0&1\\4&0\end{vmatrix}=-4\quad D_{32}=\begin{vmatrix}2&1\\0&0\end{vmatrix}=0$$

$$D_{33}=\begin{vmatrix}2&0\\0&4\end{vmatrix}=8$$

以上より，$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}4&0&-4\\0&4&0\\8&0&8\end{pmatrix}$

よって

$$\boldsymbol{A^{-1}}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}4&0&-4\\0&4&0\\8&0&8\end{pmatrix}=\boldsymbol{\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\2&0&-2\end{pmatrix}}$$

（2）$|A|=\begin{vmatrix}5&2&4\\3&-2&2\\7&1&6\end{vmatrix}$

$$=-60+28+12-(10+36-56)$$

$$=-20-(-10)=-10$$

小行列式を求めると

$$D_{11}=\begin{vmatrix}-2&2\\1&6\end{vmatrix}=-14\quad D_{12}=\begin{vmatrix}3&2\\7&6\end{vmatrix}=4$$

$$D_{13}=\begin{vmatrix}3&-2\\7&1\end{vmatrix}=17\quad D_{21}=\begin{vmatrix}2&4\\1&6\end{vmatrix}=8$$

$$D_{22}=\begin{vmatrix}5&4\\7&6\end{vmatrix}=2\quad D_{23}=\begin{vmatrix}5&2\\7&1\end{vmatrix}=-9$$

$$D_{31}=\begin{vmatrix}2&4\\-2&2\end{vmatrix}=12\quad D_{32}=\begin{vmatrix}5&4\\3&2\end{vmatrix}=-2$$

$$D_{33}=\begin{vmatrix}5&2\\3&-2\end{vmatrix}=-16$$

以上より，$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}-14&-8&12\\-4&2&2\\17&9&-16\end{pmatrix}$

よって

$$\boldsymbol{A^{-1}=-\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-14&-8&12\\-4&2&2\\17&9&-16\end{pmatrix}}$$

192（1）　与えられた連立方程式を，行列を用いて表すと

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&5\\1&5&12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

ここで，$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&5\\1&5&12\end{pmatrix}$ とすると

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\1&3&5\\1&5&12\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&3&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2\\3&9\end{vmatrix}$$

$$=9-6=3$$

また

$$\varDelta_1=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&3&5\\0&5&12\end{vmatrix}=36-25=11$$

$$\varDelta_2=\begin{vmatrix}1&1&3\\1&0&5\\1&0&12\end{vmatrix}=5-12=-7$$

$$\varDelta_3=\begin{vmatrix}1&2&1\\1&3&0\\1&5&0\end{vmatrix}=5-3=2$$

よって，クラメルの公式より

$$x=\frac{11}{3},\quad y=\frac{-7}{3}=-\frac{7}{3},\quad z=\frac{2}{3}$$

したがって，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=\left(\frac{11}{3},\ -\frac{7}{3},\ \frac{2}{3}\right)}$

（2）　与えられた連立方程式を，行列を用いて表すと

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&5\\1&5&12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$$

ここで，$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&5\\1&5&12\end{pmatrix}$ とすると

$|A|=3$　　※（1）と同じ行列

また

$$\varDelta_1=\begin{vmatrix}1&2&3\\1&3&5\\4&5&12\end{vmatrix}$$

$$=(36+40+15)-(25+24+36)=91-85=6$$

$$\varDelta_2=\begin{vmatrix}1&1&3\\1&1&5\\1&4&12\end{vmatrix}$$

$$=(12+5+12)-(20+12+3)=29-35=-6$$

$$\varDelta_3=\begin{vmatrix}1&2&1\\1&3&1\\1&5&4\end{vmatrix}$$

$$=(12+2+5)-(5+8+3)=19-16=3$$

よって，クラメルの公式より

$$x=\frac{6}{3}=2,\quad y=\frac{-6}{3}=-2,\quad z=\frac{3}{3}=1$$

したがって，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(2,\ -2,\ 1)}$

193（1）　係数行列の行列式の値が 0 となればよいので

$$\begin{vmatrix}k&4\\3&k+1\end{vmatrix}=k(k+1)-12$$

$$=k^2+k-12=(k+4)(k-3)=0$$

よって，$\boldsymbol{k=-4,\ 3}$

i）$k=-4$ のとき

係数行列を変形すると

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

方程式にもどすと，$x - y = 0$

$x = a$ とおけば，$y = a$

よって，$\boldsymbol{(x,\ y) = (a,\ a)}$　(a は 0 でない任意の数)

ii）$k = 3$ のとき

係数行列を変形すると

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

方程式にもどすと，$3x + 4y = 0$

$x = 4b$ とおけば，$y = -3b$

よって，$\boldsymbol{(x,\ y) = (4b,\ -3b)}$

(b は 0 でない任意の数)

（2）　方程式を整理すると

$$\begin{cases} (1-k)x - 2y = 0 \\ x + (4-k)y = 0 \end{cases}$$

係数行列の行列式の値が 0 となればよいので

$$\begin{vmatrix} 1-k & -2 \\ 1 & 4-k \end{vmatrix} = (1-k)(4-k) - (-2)$$

$$= k^2 - 5k + 6$$

$$= (k-2)(k-3) = 0$$

よって，$\boldsymbol{k = 2,\ 3}$

i）$k = 2$ のとき

係数行列を変形すると

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

方程式にもどすと，$x + 2y = 0$

$y = -a$ とおけば，$x = 2a$

よって，$\boldsymbol{(x,\ y) = (2a,\ -a)}$

(a は 0 でない任意の数)

ii）$k = 3$ のとき

係数行列を変形すると

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

方程式にもどすと，$x + y = 0$

$x = b$ とおけば，$y = -b$

よって，$\boldsymbol{(x,\ y) = (b,\ -b)}$

(b は 0 でない任意の数)

194（1）　与えられた 3 つのベクトルを並べてできる行列の行列式の値を求めると

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 24 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 24 \end{vmatrix}$$

$$= 48 - 36 = 12 \fallingdotseq\!\!\!\!/\ 0$$

よって，**線形独立**である．

（2）　与えられた 3 つのベクトルを並べてできる行列の行列式の値を求めると

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix}$$

$$= 36 - 36 = 0$$

よって，**線形従属**である．

195　$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$

この 2 つのベクトルを並べてできる行列の行列式の値を求めると

$$\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 35 - 8 = 27$$

よって，平行四辺形 ABCD の面積は，$|27| = \boldsymbol{27}$

196　3 つのベクトルを並べてできる行列の行列式の値を求めると

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 3 + 6 - (-1 - 27 + 4)$$

$$= 15 - (-24) = 39$$

よって，平行六面体の体積は，$|39| = \boldsymbol{39}$

∎