3章　行列式

§1　行列式の定義と性質　(p.82〜p.94)

問 1

（1）　$与式 = 1 \times (-5) - (-2) \times 4$
$= -5 + 8 = \mathbf{3}$

（2）　$与式 = 1 \times 5 \times 9 + 2 \times 6 \times 7 + 3 \times 4 \times 8$
$- 1 \times 6 \times 8 - 2 \times 4 \times 9 - 3 \times 5 \times 7$
$= 45 + 84 + 96 - 48 - 72 - 105 = \mathbf{0}$

（3）　$与式 = 2 \times 0 \times (-2) + 3 \times 2 \times 3 + (-1) \times 4 \times 1$
$- 2 \times 2 \times 1 - 3 \times 4 \times (-2) - (-1) \times 0 \times 3$
$= 18 - 4 - 4 + 24 = \mathbf{34}$

問 2

（1）$(3,\ 1,\ 2,\ 4) \longrightarrow (1,\ 3,\ 2,\ 4)$
$\longrightarrow (1,\ 2,\ 3,\ 4)$
よって，**偶順列**

（2）$(3,\ 4,\ 5,\ 2,\ 1) \longrightarrow (1,\ 4,\ 5,\ 2,\ 3)$
$\longrightarrow (1,\ 2,\ 5,\ 4,\ 3)$
$\longrightarrow (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$
よって，**奇順列**

問 3

（1）　順列 $(2,\ 3,\ 4,\ 1)$ に対応する項以外は 0 である．
$(2,\ 3,\ 4,\ 1) \longrightarrow (1,\ 3,\ 4,\ 2)$
$\longrightarrow (1,\ 2,\ 4,\ 3)$
$\longrightarrow (1,\ 2,\ 3,\ 4)$
よって，この順列は奇順列であるから，行列式の値は
$-1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = \mathbf{-24}$

（2）　順列 $(2,\ 1,\ 3,\ 4)$ と，$(2,\ 1,\ 4,\ 3)$ に対応する項以外は 0 である．
$(2,\ 1,\ 3,\ 4) \longrightarrow (1,\ 2,\ 3,\ 4)$
$\longrightarrow (1,\ 2,\ 4,\ 3)$
$\longrightarrow (1,\ 2,\ 3,\ 4)$
よって，この順列は奇順列である．
$(2,\ 1,\ 4,\ 3) \longrightarrow (1,\ 2,\ 4,\ 3)$
$\longrightarrow (1,\ 2,\ 3,\ 4)$
よって，この順列は偶順列であるから，行列式の値は
$-(3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6) + (3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 7) = -180 + 168$
$= \mathbf{-12}$

問 4

（1）　$与式 = 2\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$
$= 2(3 \cdot 7 - 6 \cdot 4)$
$= 2 \cdot (-3) = \mathbf{-6}$

（2）　$与式 = 2\begin{vmatrix} -1 & -5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$
$= 2 \cdot (-1)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$
$= -2(3 \cdot 1 - 2 \cdot 3)$
$= -2 \cdot (-3) = \mathbf{6}$

問 5

（1）　$左辺 = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$
$= a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$
$= \cdots$
$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = 右辺$

（2）　$|\,E_n\,| = \left.\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}\right\} n\ 行$
$= 1 \cdot \left.\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}\right\} (n-1)\ 行$
$= 1 \cdot 1 \cdot \left.\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}\right\} (n-2)\ 行$
$= \cdots$
$= 1^n = 1$

問 6

（1）　n 次の正方行列において，第 k 行のすべての成分が 0 であるとすると，第 k 行から 0 をくくり出して

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

（2） $$\text{左辺} = \begin{vmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{n1} & ca_{n2} & \cdots & ca_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{n1} & ca_{n2} & \cdots & ca_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= c^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{n1} & ca_{n2} & \cdots & ca_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \quad \cdots$$

$$= c^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= c^n|A| = \text{右辺}$$

問 7

（1） $$\text{与式} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 6 & 2 \\ -1 & -5 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -1 & -5 & 4 \\ 6 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -1 & -5 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & -12 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -12 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= -2\{(0 - (-12 \cdot 5)\}$$

$$= -2 \cdot 60 = \mathbf{-120}$$

（2） $$\text{与式} = - \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 3 & 9 \\ 0 & 6 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 3 & 9 \\ 6 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -13 & -15 \\ 0 & -8 & -11 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \cdot \begin{vmatrix} -13 & -15 \\ -8 & -11 \end{vmatrix}$$

$$= -2\{(-13) \cdot (-11) - (-8) \cdot (-15)\}$$

$$= -2 \cdot (143 - 120)$$

$$- 2 \cdot 23 = \mathbf{-46}$$

問 8

（1） $$\text{与式} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & a+b & 2b \\ b & a+b & 2a \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} a+b & 2b \\ a+b & 2a \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b) \begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & a \end{vmatrix}$$

$$= \boldsymbol{2(a+b)(a-b)}$$

（2） $$\text{与式} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)\{(c+a) - (b+a)\}$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)$$

$$= \boldsymbol{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

問 9

${}^tAA = E$ の両辺の行列式を求めると

$|{}^tAA| = |E| = 1$

すなわち，$|{}^tA||A| = 1$

ここで，$|{}^tA| = |A|$ であるから

$|A|^2 = 1$ となるので，$|A| = \pm 1$