3章　行列式

§1　行列式の定義と性質 (p.39〜p.)

BASIC

161（1）　与式 $= 6 \cdot 2 - 3 \cdot 1$

$= 12 - 3 = \mathbf{9}$

（2）　与式 $= (-2) \cdot 3 - 3 \cdot (-4)$

$= -6 - (-12) = \mathbf{6}$

（3）　与式 $= 3 \cdot 4 \cdot 3 + 0 \cdot 5 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 1$

$- 3 \cdot 5 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot 4 \cdot 2$

$= 36 + 2 - 15 - 16 = \mathbf{7}$

（4）　与式 $= (-4) \cdot (-1) \cdot 2 + 5 \cdot 0 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 \cdot 1$

$- (-4) \cdot 0 \cdot 1 - 5 \cdot 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) \cdot (-3)$

$= 8 + 6 - 20 - 9 = \mathbf{-15}$

162（1）　$(4,\ 3,\ 1,\ 2) \longrightarrow (1,\ 3,\ 4,\ 2)$

$\longrightarrow (1,\ 2,\ 4,\ 3)$

$\longrightarrow (1,\ 2,\ 3,\ 4)$

よって，**奇順列**

（2）　$(2,\ 5,\ 1,\ 3,\ 4) \longrightarrow (1,\ 5,\ 2,\ 3,\ 4)$

$\longrightarrow (1,\ 2,\ 5,\ 3,\ 4)$

$\longrightarrow (1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 4)$

$\longrightarrow (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$

よって，**偶順列**

163（1）　順列 $(3,\ 1,\ 2,\ 4)$ に対応する項以外は 0 である．

$(3,\ 1,\ 2,\ 4) \longrightarrow (1,\ 3,\ 2,\ 4)$

$\longrightarrow (1,\ 2,\ 3,\ 4)$

よって，この順列は偶順列であるから，行列式の値は

$+2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 3 = \mathbf{36}$

（2）　順列 $(1,\ 2,\ 3,\ 4)$ と，$(2,\ 1,\ 3,\ 4)$ に対応する項以外は 0 である．

順列 $(1,\ 2,\ 3,\ 4)$ は偶順列である．

$(2,\ 1,\ 3,\ 4) \longrightarrow (1,\ 2,\ 3,\ 4)$

よって，この順列は奇順列であるから，行列式の値は

$+(3 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7) - (2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 7) = 84 - 112$

$= \mathbf{-28}$

164（1）　与式 $= -1 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$

$= -(2 \cdot 3 - 4 \cdot 1)$

$= -(6 - 4) = \mathbf{-2}$

（2）　与式 $= 3 \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix}$

$= 3 \cdot 2 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}$

$= 6\{(-1) \cdot 6 - 4 \cdot (-2)\}$

$= 6(-6 + 8) = \mathbf{12}$

165（1）　与式 $= 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$

$= 2 \cdot 1 \cdot |4|$

$= 2 \cdot 1 \cdot 4 = \mathbf{8}$

（2）　与式 $= -6 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

$= -6 \cdot 1 \cdot 2 \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$

$= -6 \cdot 1 \cdot (-3) \cdot |-1|$

$= -6 \cdot 1 \cdot (-3) \cdot (-1) = \mathbf{-18}$

166（1）　第 3 行がすべて 0 なので，与式 $= \mathbf{0}$

（2）　与式 $= 5^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$= 125 \cdot 1 = \mathbf{125}$

（3）　与式 $= 2^3 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$= 8\{(-1 - 1 - 1) - (1 - 1 + 1)\}$

$= 8 \cdot (-4) = \mathbf{-32}$

〔別解〕

与式 $= 2^3 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$= 8 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$

$= -8 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

$= -8 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 = \mathbf{-32}$

（4）　与式 $= 3^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

$= 27\{(0 + 18 - 2) - (8 + 3 + 0)\}$

$= 27 \cdot 5 = \mathbf{135}$

〔別解〕

$$与式 = 3^3\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -27\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -27\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -27\cdot(-1)\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 27(15-10)$$

$$= 27\cdot 5 = \mathbf{135}$$

167（1）
$$与式 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -(4-20)$$

$$= -(-16) = \mathbf{16}$$

（2）
$$与式 = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -4 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 11 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -(-1)\begin{vmatrix} -4 & -4 \\ 11 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -16-(-44) = \mathbf{28}$$

（3）
$$与式 = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 6(3-21)$$

$$= 6\cdot(-18) = \mathbf{-108}$$

（4）
$$与式 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & -13 & 7 & -11 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 4 & -5 \\ 0 & -4 & 5 \\ -13 & 7 & -11 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -13 & 7 & -11 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

168（1）
$$与式 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & b \\ b & a-b & -a \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot\begin{vmatrix} -(a-b) & b \\ a-b & -a \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)\begin{vmatrix} -1 & b \\ 1 & -a \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(a-b) = \boldsymbol{(a-b)^2}$$

（2）
$$与式 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & a+2b & b \\ b & a+2b & 2a \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot\begin{vmatrix} a+2b & b \\ a+2b & 2a \end{vmatrix}$$

$$= (a+2b)\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & 2a \end{vmatrix} = \boldsymbol{(a+2b)(2a-b)}$$

（3）　与式 $= \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1-a^2 & a-ab \\ 0 & b-ab & 1-b^2 \end{vmatrix}$

$$= 1\cdot\begin{vmatrix} (1-a)(1+a) & a(1-a) \\ b(1-b) & (1-b)(1+b) \end{vmatrix}$$

$$= (1-a)(1-b)\begin{vmatrix} 1+a & a \\ b & 1+b \end{vmatrix}$$

$$= (1-a)(1-b)\{(1+a)(1+b)-ab\}$$

$$= (1-a)(1-b)(1+a+b+ab-ab)$$

$$= \boldsymbol{(a-1)(b-1)(a+b+1)}$$

（4）　与式 $= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 1 & -ab & a \\ 0 & 1 & a^2 & 0 \\ a & 0 & b^2-a^2 & 1 \end{vmatrix}$

$$= 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -ab & a \\ 1 & a^2 & 0 \\ 0 & b^2-a^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -ab & a \\ 0 & a^2+ab & -a \\ 0 & b^2-a^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot\begin{vmatrix} a^2+ab & -a \\ b^2-a^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a(a+b) & -a \\ (b-a)(b+a) & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a(a+b)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ (b-a) & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a(a+b)\{1+(b-a)\}$$

$$= \boldsymbol{a(a+b)(b-a+1)}$$

169（1）　$|{}^tA| = |A|,\ \ |A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$ であるから

左辺 $= |{}^tA||A^{-1}|$

$= |A|\cdot\dfrac{1}{|A|} = 1 =$ 右辺

（2）　$A^2 = A$ の両辺の行列式を求めると

$|A^2| = |A|$

$|A||A| = |A|$

すなわち，$|A|^2 = |A|$

これより，$|A|(|A|-1) = 0$ であるから

$|A| = 0,\ 1$

CHECK

170（1）　$(2,\ 4,\ 5,\ 1,\ 3) \longrightarrow (1,\ 4,\ 5,\ 2,\ 3)$

$\longrightarrow (1,\ 2,\ 5,\ 4,\ 3)$

$\longrightarrow (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$

よって，**奇順列**

（2）　$(2,\ 6,\ 1,\ 5,\ 4,\ 3) \longrightarrow (1,\ 6,\ 2,\ 5,\ 4,\ 3)$

$\longrightarrow (1,\ 3,\ 2,\ 5,\ 4,\ 6)$

$\longrightarrow (1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 4,\ 6)$

$\longrightarrow (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$

よって，**偶順列**

171（1）　与式 $= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$$= 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot 1 - (-1)\cdot(-1)$$

$$= 1 - 1 = \boldsymbol{0}$$

（2）　与式 $= \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{6}\cdot 4\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

$$= \frac{2}{15}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{2}{15}\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{2}{15}\{-4\cdot 1 - 0\cdot(-1)\}$$

$$= \frac{2}{15}\cdot(-4) = \boldsymbol{-\frac{8}{15}}$$

（3）　与式 $= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \boldsymbol{0}$（2 行と 4 行が等しい）

（4）　与式 $= 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ -3 & 5 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & -5 & 3 \\ 5 & -7 & -3 & 0 \end{vmatrix}$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \\ -2 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2\cdot 2\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 4\{5\cdot 5 - (-2)\cdot 5\} = 4\cdot 35 = \boldsymbol{140}$$

172　各行から，-2 をくくり出すと

$$|-2A| = (-2)^5|A|$$
$$= -32\cdot 5 = \mathbf{-160}$$

173（1）　与式 $= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & a-3b & b \\ b & a-3b & a \end{vmatrix}$

$$= 1\cdot\begin{vmatrix} a-3b & b \\ a-3b & a \end{vmatrix}$$
$$= (a-3b)\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & a \end{vmatrix}$$
$$= \boldsymbol{(a-3b)(a-b)}$$

（2）　与式 $= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2 & ab-a^2 & b^2-a^2 \\ b^2 & ab-b^2 & a^2-b^2 \end{vmatrix}$

$$= 1\cdot\begin{vmatrix} a(b-a) & (b+a)(b-a) \\ b(a-b) & (a+b)(a-b) \end{vmatrix}$$
$$= (a-b)\cdot(a+b)(a-b)\begin{vmatrix} -a & -1 \\ b & 1 \end{vmatrix}$$
$$= (a+b)(a-b)^2\{-a-(-b)\}$$
$$= (a+b)(a-b)^2(-a+b)$$
$$= \boldsymbol{-(a+b)(a-b)^3}$$

（3）　与式 $= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b & c-a & c-b \\ ab & bc-ab & ca-ab \end{vmatrix}$

$$= 1\cdot\begin{vmatrix} c-a & c-b \\ b(c-a) & a(c-b) \end{vmatrix}$$
$$= (c-a)(c-b)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & a \end{vmatrix}$$
$$= (c-a)(c-b)(a-b)$$
$$= \boldsymbol{-(a-b)(b-c)(c-a)}$$

（4）　与式 $= \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 0 & a^2-ab & b^2-ab \\ 0 & b^2-ab & a^2-ab \end{vmatrix}$

$$= 1\cdot\begin{vmatrix} a(a-b) & b(b-a) \\ b(b-a) & a(a-b) \end{vmatrix}$$
$$= (a-b)^2\begin{vmatrix} a & -b \\ -b & a \end{vmatrix}$$
$$= (a-b)^2(a^2-b^2)$$
$$= (a-b)^2(a+b)(a-b)$$
$$= \boldsymbol{(a+b)(a-b)^3}$$

174（1）　AB が正則であるから，$|AB| \neq 0$

これより，$|A||B| \neq 0$

よって，$|A| \neq 0$，$|B| \neq 0$ である．

（2）　A が正則であるから，$|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

よって

$$左辺 = |A^{-1}||B||A|$$
$$= \frac{1}{|A|}\cdot|A||B|$$
$$= 1\cdot|B| = |B| = 右辺$$

STEP UP

175（1）　与式 $= -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & -24 & 18 & -19 \\ 0 & 10 & -5 & 5 \\ 0 & 16 & -10 & 11 \end{vmatrix}$$
$$= -\begin{vmatrix} -24 & 18 & -19 \\ 10 & -5 & 5 \\ 16 & -10 & 11 \end{vmatrix}$$
$$= -5\begin{vmatrix} -24 & 18 & -19 \\ 2 & -1 & 1 \\ 16 & -10 & 11 \end{vmatrix}$$
$$= 5\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -24 & 18 & -19 \\ 16 & -10 & 11 \end{vmatrix}$$
$$= 5\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 6 & -7 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= 10\begin{vmatrix} 6 & -7 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= 10\{6\cdot 3-(-2)\cdot(-7)\}$$
$$= 10(18-14) = 10\cdot 4 = \mathbf{40}$$

（2）　与式 $= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ -7 & -6 & 8 & 21 \\ -4 & -7 & 9 & 11 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{vmatrix}$　(1 行 $-$ 4 行 $\times$ 1)

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 1 & -7 \\ -4 & -3 & 5 & -5 \\ 2 & -5 & -3 & 16 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -7 \\ -3 & 5 & -5 \\ -5 & -3 & 16 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 8 & -26 \\ -5 & 2 & -19 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 8 & -26 \\ 2 & -19 \end{vmatrix}$$
$$= 8\cdot(-19)-(-26)\cdot 2 = -152+52 = \mathbf{-100}$$

（3）　与式 $= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -7 \\ 0 & -2 & -2 & -8 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & -7 \\ -2 & -2 & -8 \end{vmatrix}$

$= -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -7 & -4 & -1 \\ -8 & -2 & -2 \end{vmatrix}$ （1 列と 3 列の交換）

$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & -11 & -1 \\ -8 & -10 & -2 \end{vmatrix}$

$= -\begin{vmatrix} -11 & -1 \\ -10 & -2 \end{vmatrix}$

$= -\{-11 \cdot (-2) - (-1) \cdot (-10)\}$

$= -(22 - 10) = \mathbf{-12}$

（4）　与式 $= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ （1 列と 2 列の交換）

$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

$= -\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & -1 \\ 6 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

$= -\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -1 & 0 \\ 5 & -5 & 2 & -1 \\ 6 & -6 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

$= -(-1)\begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -5 & 2 & -1 \\ -6 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

$= -\begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & -5 & -1 \\ 0 & -6 & -1 \end{vmatrix}$ （1 列と 2 列の交換）

$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & -5 & -1 \\ 0 & -6 & -1 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & -6 & -1 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} -9 & -1 \\ -6 & -1 \end{vmatrix}$

$= (-9) \cdot (-1) - (-1) \cdot (-6)$

$= 9 - 6 = \mathbf{3}$

176　※ 横幅が足りないので，最終ページ

177（1）　$A^3 = E$ の両辺の行列式をとると

$|A^3| = |E|$

これより，$|A|^3 = 1$

A の成分はすべて実数なので，$|A|$ の値も実数である．

よって，$\boldsymbol{|A| = 1}$

（2）　$A^3 = -E$ の両辺の行列式をとると

$|A^3| = |-E|$

E は n 次の単位行列だから，右辺の各行から -1 を括り出すと

$|A|^3 = (-1)^n|E| = (-1)^n$

$|A|$ の値は実数であから

n が偶数のとき，$|A|^3 = 1$ より，$\boldsymbol{|A| = 1}$

n が奇数のとき，$|A|^3 = -1$ より，$\boldsymbol{|A| = -1}$

178（1）　まず，1 列に，2，3，4 列を加える．

$$
与式 = \begin{vmatrix} a+3b & b & b & b \\ a+3b & a & b & b \\ a+3b & b & a & b \\ a+3b & b & b & a \end{vmatrix}
$$

$$
= (a+3b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 1 & a & b & b \\ 1 & b & a & b \\ 1 & b & b & a \end{vmatrix}
$$

$$
= (a+3b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}
$$

$$
= (a+3b)\begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}
$$

$$
= \boldsymbol{(a+3b)(a-b)^3}
$$

（2）　まず，1 列に，2，3，4 列を加える．

$$
与式 = \begin{vmatrix} a+b+c & a & b & c \\ a+b+c & 0 & c & b \\ a+b+c & c & 0 & a \\ a+b+c & b & a & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & 0 & c & b \\ 1 & c & 0 & a \\ 1 & b & a & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & -a & c-b & b-c \\ 0 & c-a & -b & a-c \\ 0 & b-a & a-b & -c \end{vmatrix}
$$

$$
= (a+b+c)\begin{vmatrix} -a & c-b & b-c \\ c-a & -b & a-c \\ b-a & a-b & -c \end{vmatrix}
$$

$$
= (a+b+c)\begin{vmatrix} -a-b+c & c-b & b-c \\ -a-b+c & -b & a-c \\ 0 & a-b & -c \end{vmatrix}
$$

（1 列に 2 列を加える）

$$
= (a+b+c)(-a-b+c)\begin{vmatrix} 1 & c-b & b-c \\ 1 & -b & a-c \\ 0 & a-b & -c \end{vmatrix}
$$

$$
= (a+b+c)(-a-b+c)\begin{vmatrix} 1 & c-b & b-c \\ 0 & -c & a-b \\ 0 & a-b & -c \end{vmatrix}
$$

$$
= (a+b+c)(-a-b+c)\begin{vmatrix} -c & a-b \\ a-b & -c \end{vmatrix}
$$

$$
= (a+b+c)(-a-b+c)\{c^2-(a-b)^2\}
$$

$$
= (a+b+c)(-a-b+c)\{c+(a-b)\}\{c-(a-b)\}
$$

$$
= (a+b+c)(-a-b+c)(c+a-b)(c-a+b)
$$

$$
= \boldsymbol{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)}
$$

179（1）　左辺の 1 列に，2，3 列を加える．

$$
左辺 = \begin{vmatrix} 3a+b & a & a \\ 3a+b & a+b & a \\ 3a+b & a & a+b \end{vmatrix}
$$

$$
= (3a+b)\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 1 & a+b & a \\ 1 & a & a+b \end{vmatrix}
$$

$$
= (3a+b)\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix}
$$

$$
= (3a+b)\begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix}
$$

$$
= (3a+b)\cdot b^2 = b^2(3a+b) = 右辺
$$

（2）　左辺の 1 列に，2，3 列を加える．

$$
左辺 = \begin{vmatrix} 2a+2b+2c & b & c \\ 2a+2b+2c & a+2b+c & c \\ 2a+2b+2c & b & a+b+2c \end{vmatrix}
$$

$$
= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a+2b+c & c \\ 1 & b & a+b+2c \end{vmatrix}
$$

$$
= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a+b+c & 0 \\ 0 & 0 & a+b+c \end{vmatrix}
$$

$$
= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} a+b+c & 0 \\ 0 & a+b+c \end{vmatrix}
$$

$$
= 2(a+b+c)\cdot(a+b+c)^2 = 2(a+b+c)^3 = 右辺
$$

（3）　左辺の 1 列に，2 列を加える．

$$
左辺 = \begin{vmatrix} a+b & -c & -b \\ a+b & a+b+c & -a \\ -a-b & -a & a+b+c \end{vmatrix}
$$

$$
= (a+b)\begin{vmatrix} 1 & -c & -b \\ 1 & a+b+c & -a \\ -1 & -a & a+b+c \end{vmatrix}
$$

$$
= (a+b)\begin{vmatrix} 1 & -c & -b \\ 0 & a+b+2c & -a+b \\ 0 & -a-c & a+c \end{vmatrix}
$$

$$
= (a+b)\begin{vmatrix} a+b+2c & -a+b \\ -a-c & a+c \end{vmatrix}
$$

$$
= (a+b)(a+c)\begin{vmatrix} a+b+2c & -a+b \\ -1 & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
= (a+b)(a+c)\{(a+b+2c)+(-a+b)\}
$$

$$
= (a+b)(a+c)(2b+2c)
$$

$$
= 2(a+b)(b+c)(c+a) = 右辺
$$

180（1）

$$\text{左辺}=\begin{vmatrix} 2x+y+z & y+z & z+x \\ x+2y+z & z+x & x+y \\ x+y+2z & x+y & y+z \end{vmatrix} \quad (1\text{列}+3\text{列})$$

$$=\begin{vmatrix} 2x & y+z & z+x \\ 2y & z+x & x+y \\ 2z & x+y & y+z \end{vmatrix} \quad (1\text{列}-2\text{列})$$

$$=2\begin{vmatrix} x & y+z & z+x \\ y & z+x & x+y \\ z & x+y & y+z \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix} x & y+z & z \\ y & z+x & x \\ z & x+y & y \end{vmatrix} \quad (3\text{列}-1\text{列})$$

$$=2\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} \quad (2\text{列}-3\text{列})$$

$=$ 右辺

（2）

$$\text{左辺}=\begin{vmatrix} 2c & 0 & 2a \\ b-c & c+a & b-a \\ c-b & c-a & a+b \end{vmatrix} \quad (1\text{行}+3\text{行})$$

$$=\begin{vmatrix} 2c & 0 & 2a \\ 0 & 2c & 2b \\ c-b & c-a & a+b \end{vmatrix} \quad (2\text{行}+3\text{行})$$

$$=\begin{vmatrix} 2c & 0 & 2a \\ 0 & 2c & 2b \\ -b & c-a & b \end{vmatrix} \quad \left(3\text{行}-1\text{行}\times\frac{1}{2}\right)$$

$$=\begin{vmatrix} 2c & 0 & 2a \\ 0 & 2c & 2b \\ -b & -a & 0 \end{vmatrix} \quad \left(3\text{行}-2\text{行}\times\frac{1}{2}\right)$$

$=0-\{2c\cdot 2b\cdot(-a)+0+2a\cdot 2c\cdot(-b)\}$（サラス）

$=-(4abc-4abc)=8abc=$ 右辺

181（1）

$$\text{左辺}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & -4 & -x^2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -x^2 \end{vmatrix}$$

$$=-4\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -x^2 \end{vmatrix}$$

$=-4(-x^2+4)$

$=4(x^2-4)=4(x+2)(x-2)$

よって，$4(x+2)(x-2)=0$ より，$\boldsymbol{x=\pm 2}$

（2）

$$\text{左辺}=\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & 1-x & x-1 \\ 0 & 1-x^2 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1-x & x-1 \\ (1-x)(1+x) & 1-x \end{vmatrix}$$

$$=(x-1)^2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -(x+1) & -1 \end{vmatrix}$$

$=(x-1)^2\{1+(x+1)\}=(x-1)^2(x+2)$

よって，$(x-1)^2(x+2)=0$ より，$\boldsymbol{x=1}$ **(重解)，$\boldsymbol{-2}$**

（3）

$$\text{左辺}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -x^2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & x & 1 \\ x & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -x^2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & x & 1 \\ 0 & 1 & x^3 \\ 1 & 0 & -x^2 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 1 & 0 & -x^2 \\ 0 & 1 & x^3 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 1 & x^3 \\ x & 1 \end{vmatrix}$$

$=-(1-x^4)=(x^2+1)(x^2-1)$

よって，$(x^2+1)(x^2-1)=0$ より，$\boldsymbol{x=\pm 1\ \ \pm i}$

（4）

$$\text{左辺}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & x-1 & 1 & -x \\ 0 & 1-x & 0 & 1-x^2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ x-1 & 1 & -x \\ 1-x & 0 & (1-x)(1+x) \end{vmatrix}$$

$$=(1-x)\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ x-1 & 1 & -x \\ 1 & 0 & x+1 \end{vmatrix}$$

$$=(1-x)\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & -x(x-1)+1 & 1-2x \\ 0 & -x & x \end{vmatrix}$$

$$=(1-x)\begin{vmatrix} -x^2+x+1 & 1-2x \\ -x & x \end{vmatrix}$$

$$=x(1-x)\begin{vmatrix} -x^2+x+1 & 1-2x \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$=x(1-x)\{-x^2+x+1+(1-2x)\}$

$=-x(1-x)(x^2+x-2)$

$=-x(1-x)(x-1)(x+2)=x(x-1)^2(x+2)$

よって，$x(x-1)^2(x+2)=0$ より，$\boldsymbol{x=0,\ 1}$ **(重解)，$\boldsymbol{-2}$**

（5）　左辺 $= \begin{vmatrix} x-1 & -x+1 & 0 \\ -1 & x+4 & 10 \\ -5 & 6 & x-6 \end{vmatrix}$ （1 行 − 2 行）

$$= (x-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & x+4 & 10 \\ -5 & 6 & x-6 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & x+3 & 10 \\ 0 & 1 & x-6 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)\begin{vmatrix} x+3 & 10 \\ 1 & x-6 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)\{(x+3)(x-6)-10\}$$

$$= (x-1)(x^2-3x-28)$$

$$= (x-1)(x+4)(x-7)$$

よって，$(x-1)(x+4)(x-7)=0$ より，$\boldsymbol{x=1,\ -4,\ 7}$

176　$^tA = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$ であるから

$$A\,^tA = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & -ab+ab-cd+cd & -ac+bd+ac-bd & -ad-bc+bc+ad \\ -ab+ab-cd+cd & b^2+a^2+d^2+c^2 & bc+ad-ad-bc & bd-ac-bd+ac \\ -ac+bd-ac-bd & bc+ad-ad-bc & c^2+d^2+a^2+b^2 & cd-cd+ab-ab \\ -ad-bc+bc+ad & bd-ac-bd+ac & cd-cd+ab-ab & d^2+c^2+b^2+a^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

これより，$|A\,^tA| = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4$

一方，$|A\,^tA| = |A||\,^tA| = |A||A| = |A|^2$ であるから

$|A|^2 = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4$

よって，$|A| = \pm(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$

ここで，$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{vmatrix}$ において，例えば a^4 の項が現れるのは，順列 $(1,2,3,4)$ に対応する積のときだけなので，その符号は $+$ である．

よって，$|\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{(a^2+b^2+c^2+d^2)^2}$

∎