練習問題 2-A

1.（1）　拡大係数行列を変形すると

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -2 & 7 \\ 1 & -4 & 1 & -5 \\ 7 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -2 & 7 \\ 0 & -9 & 3 & -12 \\ 0 & -38 & 13 & -49 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & -38 & 13 & -49 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

これを方程式にもどすと

$$\begin{cases} x+5y-2z = 7 & \cdots ① \\ y-\dfrac{1}{3}z = \dfrac{4}{3} & \cdots ② \\ z = 5 & \cdots ③ \end{cases}$$

③ の $z=5$ を ② に代入すると

$y-\dfrac{1}{3}\cdot 5=\dfrac{4}{3}$ より，$y=\dfrac{9}{3}=3$

$z=5,\ y=3$ を ① に代入すると

$x+5\cdot 3-2\cdot 5=7$ より，$x=7-15+10=2$

よって，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(2,\ 3,\ 5)}$

（2）　拡大係数行列を変形すると

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 4 & -1 & -5 & 1 \\ 6 & 7 & 1 & 27 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -9 \\ 0 & 4 & 4 & 12 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 12 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

これを方程式にもどすと

$$\begin{cases} 2x+y-z = 5 & \cdots ① \\ y+z = 3 & \cdots ② \\ 0x+0y+0z = 0 & \cdots ③ \end{cases}$$

③ はどのような $x,\ y,\ z$ に対しても成り立つから，これを省略し，$z=t$ とくと

② より，$y=3-t$

$y=3-t,\ z=t$ を ① に代入して

$2x+(3-t)-t=5$

$2x=2+2t$

$x=1+t$

よって，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(1+t,\ 3-t,\ t)}$　**(t は任意の数)**

2.（1）　連立1次方程式の拡大係数行列は，$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 7 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$

であるから，これを変形する．

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 7 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 16 \end{array}\right)$$

これを方程式にもどすと

$$\begin{cases} x+2y = -1 & \cdots ① \\ y-z = 6 & \cdots ② \\ -z = 16 & \cdots ③ \end{cases}$$

③ より，$z=-16$ なので，これを ② に代入すると

$y+16=6$，すなわち，$y=-10$

これを ① に代入すると

$x+2\cdot(-10)=-1$，すなわち，$x=-1+20=19$

よって，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(19,\ -10,\ -16)}$

（2）

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -8 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -9 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

よって，$\boldsymbol{A^{-1}=\begin{pmatrix} -9 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \\ 8 & -2 & -1 \end{pmatrix}}$

（3）　$A\vec{x}=\vec{c}$ より

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{c}$$
$$= \begin{pmatrix} -9 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \\ 8 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -9+4+6 \\ 5-2-3 \\ 8-4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z) = (1,\ 0,\ 1)}$

3.　与えられた等式の両辺の行列の型より，X は 3 次の正方行列である．

ここで，$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = A$，また，$\vec{x}_1$，$\vec{x}_2$，$\vec{x}_3$ を 3 次の列ベクトルとし，$X = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3 \end{pmatrix}$ とすれば，この等式は，3 つの方程式

$$A\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},\ A\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ A\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

を 1 つにまとめたものである．

これらの方程式を同時に解くと

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 4 & 3 & 9 \\ 1 & -2 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 3 & 9 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -8 & -11 & -5 & -18 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} & \frac{5}{8} & \frac{9}{4} \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \frac{13}{8} & \frac{3}{8} & \frac{15}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{9}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} & \frac{5}{8} & \frac{9}{4} \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{9}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{8} & \frac{5}{8} & \frac{9}{4} \end{array}\right)$$

よって，$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{9}{8} \\ \frac{11}{8} \end{pmatrix}$，$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{5}{8} \end{pmatrix}$，$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{7}{4} \\ \frac{9}{4} \end{pmatrix}$ であるから

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{9}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{7}{4} \\ \frac{11}{8} & \frac{5}{8} & \frac{9}{4} \end{pmatrix}}$$

または，$\boldsymbol{X = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 16 \\ -9 & 1 & -14 \\ 11 & 5 & 18 \end{pmatrix}}$

4.　拡大係数行列を変形すると

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 7 & 7 \\ 3 & 6 & 11 & 12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

よって，係数行列も拡大係数行列も階数は **2** である．

（※ 係数行列と拡大係数行列の階数が等しいので，解が存在する．）

また，これを方程式にもどすと

$$\begin{cases} x+2y+3z = 2 & \cdots ① \\ z = 3 & \cdots ② \\ 0x+0y+0z = 0 & \cdots ③ \end{cases}$$

③ はどのような x，y，z に対しても成り立つから，これを省略する．

② より，$z=3$ であるから，これを ① に代入して

$x+2y+9=2$

$x=-2y-7$

$y=t$ とおくと，$x=-2t-7$

よって，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z) = (-2t-7,\ t,\ 3)}$　**(t は任意の数)**

練習問題 2-B

1.
$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 5 & -5 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & -1 & 1 & -7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -1 & -1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 9 & -1 & 1 & -7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -1 & -1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 10 & -7 & -\frac{9}{5} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & -4 & -\frac{3}{5} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -1 & -1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 10 & -7 & -\frac{9}{5} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & -4 & -\frac{3}{5} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -1 & -1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{8}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \frac{3}{5} & \frac{6}{5} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -1 & -1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -\frac{3}{5} & -\frac{6}{5} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{8}{5} & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -1 & -1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -\frac{3}{5} & -\frac{6}{5} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -1 & -1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -\frac{3}{5} & -\frac{6}{5} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -1 & -1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right)$$

よって，求める逆行列は，$\boldsymbol{\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$

2. 与えられた等式の両辺の行列の型より，X は 3 次の正方行列である．

ここで，$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 9 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = A$，また，$\vec{x}_1$，$\vec{x}_2$，$\vec{x}_3$ を 3 次の列ベクトルとし，$X = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3 \end{pmatrix}$ とすれば，この等式は，3 つの方程式

$$A\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},\ A\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ A\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を 1 つにまとめたものである．

これらの方程式を同時に解くと

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 9 & 3 & -1 & 7 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

よって，係数行列と 3 つの方程式の拡大係数行列の階数はすべて 3 となるので，解が存在する．

第 4 行に関する方程式は恒等式となるので省略し，さらに消去法をすすめると

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 3 & -5 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -9 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 9 & -14 & 32 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -9 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

よって，$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -14 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 32 \\ 21 \\ -4 \end{pmatrix}$ であるから

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 9 & -14 & 32 \\ 6 & -9 & 21 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}}$$

3. 拡大係数行列を変形すると

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & -6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

よって，係数行列も拡大係数行列も階数は **2** である．
（※ 係数行列と拡大係数行列の階数が等しいので，解が存在する．）
下の 2 行に関する方程式は常に成り立つので省略し，方程式にもどすと

$$\begin{cases} x+2y+z+w = -1 & \cdots ① \\ \quad y-z+2w = 5 & \cdots ② \end{cases}$$

$z=s,\ w=t$ とおくと

② より，$y=5+s-2t$

$y=5+s-2t,\ z=s,\ w=t$ を ① に代入して

$x+2(5+s-2t)+s+t=-1$

$x+10+2s-4t+s+t=-1$

$x=-11-3s+3t$

よって

$$\begin{cases} \boldsymbol{x=-11-3s+3t} \\ \boldsymbol{y=5+s-2t} \\ \boldsymbol{z=s} \\ \boldsymbol{w=t} \end{cases} \qquad (s,\ t \text{ は任意の数})$$

■