2章　行列

練習問題 1-A

1. （1）

$$与式 = 2\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 2 & 2 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 & 21 & 9 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4-15-3 & 0-21-(-1) & 8-9-4 \\ 2-6-6 & 2-0-2 & -6-(-3)-0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{-14} & \mathbf{-20} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{-10} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$$

（2）

$$与式 = 2\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 2 & 2 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & -3 & 12 \\ 18 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4-5+9 & 0-7+(-3) & 8-3+12 \\ 2-2+18 & 2-0+6 & -6-(-1)+0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{-10} & \mathbf{17} \\ \mathbf{18} & \mathbf{8} & \mathbf{-5} \end{pmatrix}$$

2. （1）　$3X - 2B = X + 4A$ より

$$3X - X = 4A + 2B$$

$$2X = 4A + 2B$$

$$X = 2A + B$$

$$= 2\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -4 & 8 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6+2 & 2+1 \\ -4+(-3) & 8+2 \\ 2+(-1) & 10+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-7} & \mathbf{10} \\ \mathbf{1} & \mathbf{13} \end{pmatrix}$$

（2）　$2A - B + X = 3(X + B)$ より

$$2A - B + X = 3X + 3B$$

$$-2X = -2A + 4B$$

$$X = A - 2B$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3-4 & 1-2 \\ -2-(-6) & 4-4 \\ 1-(-2) & 5-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

3. （1）

$$与式 = \begin{pmatrix} 1+0+9 & 4+0+18 & 7+0+27 \\ 2-2+12 & 8-5+24 & 14-8+36 \\ 0-4-15 & 0-10-30 & 0-16-45 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{10} & \mathbf{22} & \mathbf{34} \\ \mathbf{12} & \mathbf{27} & \mathbf{42} \\ \mathbf{-19} & \mathbf{-40} & \mathbf{-61} \end{pmatrix}$$

（2）

$$与式 = \begin{pmatrix} 1+0 & 3+3 & 2+15 \\ 2+0 & 6+1 & 4+5 \\ -1+0 & -3+3 & -2+15 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{6} & \mathbf{17} \\ \mathbf{2} & \mathbf{7} & \mathbf{9} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{13} \end{pmatrix}$$

4. （1）　$5 \cdot 2 - 4 \cdot 3 = -2 \fallingdotseq 0$ であるから，**正則である．**

逆行列は，$\dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}}$

（2）　$6 \cdot (-2) - 4 \cdot (-3) = 0$ であるから，**正則ではない．**

5.　与えられた行列が正則であるための条件は，$5 \cdot a - 2 \cdot 10 \fallingdotseq 0$ であるから，$5a - 20 \fallingdotseq 0$，すなわち，$\boldsymbol{a \fallingdotseq 4}$

このとき

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 10 & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5a-20}\begin{pmatrix} a & -2 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{5(a-4)}\begin{pmatrix} a & -2 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}}$$

6.　$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ はいずれも正則であり

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{15-9}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3-4}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

ここで，与えられた等式の両辺に，左から $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$ を，右から $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$ をかけると

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$$

すなわち

$$EAE = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 15-15 & 20-18 \\ -9+15 & -12+18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0+4 & 0+(-2) \\ -18+12 & 12-6 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}}$$

練習問題 1-B

1. $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると

$$X^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

よって，$X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ となるためには

$$\begin{cases} a^2+bc = 1 & \cdots ① \\ b(a+d) = 0 & \cdots ② \\ c(a+d) = 0 & \cdots ③ \\ bc+d^2 = 4 & \cdots ④ \end{cases}$$

④ より，$bc = 4-d^2$

① に代入して，$a^2+(4-d^2) = 1$，すなわち，$a^2-d^2 = -3$

これより，$(a+d)(a-d) = -3$ であるから，$a+d \fallingdotseq 0$

②, ③ において，$a+d \fallingdotseq 0$ より，$b = c = 0$

①, ④ に代入して, $a^2 = 1$, $d^2 = 4$, すなわち, $a = \pm 1$, $d = \pm 2$

以上より

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

2. （1）$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+ab & a+ac \\ b+bc & ab+c^2 \end{pmatrix}$

一方，$3A = \begin{pmatrix} 3 & 3a \\ 3b & 3c \end{pmatrix}$ であるから

$$\begin{cases} 1+ab = 3 \\ a+ac = 3a \\ b+bc = 3b \\ ab+c^2 = 3c \end{cases}$$

整理すると

$$\begin{cases} ab = 2 & \cdots ① \\ a(c-2) = 0 & \cdots ② \\ b(c-2) = 0 & \cdots ③ \\ ab+c^2-3c = 0 & \cdots ④ \end{cases}$$

a, b は正の整数だから，① より，$(a,\ b) = (1,\ 2)$ または，$(a,\ b) = (2,\ 1) \cdots ⑤$

また，① を ④ に代入すると

$c^2-3c+2 = 0$

$(c-1)(c-2) = 0$

よって，$c = 1,\ 2$

$c = 1$ を ②, ③ に代入すると，$-a = 0$, $-b = 0$ となり，⑤ に矛盾する.

$c = 2$ のとき，②, ③ は任意の a, b について成り立つ.

以上より，$\boldsymbol{(a,\ b,\ c) = (1,\ 2,\ 2), (2,\ 1,\ 2)}$

（2） $A^2 = 3A$ を利用して

$$\begin{aligned} A^n &= A^{n-2}A^2 = A^{n-2}\cdot 3A \\ &= 3A^{n-1} \\ &= 3A^{n-3}A^2 = 3A^{n-3}\cdot 3A \\ &= 3^2A^{n-2} \\ &= \cdots \\ &= \boldsymbol{3^{n-1}A} \end{aligned}$$

〔別解〕

$A^2 = 3A$ より，$A^3 = 3A^2 = 3\cdot 3A$

$= 3^2A$

$A^3 = 3^2A$ より，$A^4 = 3A^3 = 3\cdot 3A^2$

$= 3^2A$

よって，$A^n = 3^{n-1}A \cdots ①$ と推測できるので，これを数学的帰納法によって証明する.

[1] $n = 1$ のとき

左辺 $= A^1 = A$, 右辺 $= 3^0A = A$

よって，$n = 1$ のとき，①は成り立つ.

[2] $n = k$ のとき，①が成り立つと仮定する.

$A^k = 3^{k-1}A$

$n = k+1$ のとき

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= 3^{k-1}AA \\ &= 3^{k-1}A^2 \\ &= 3^{k-1}\cdot 3A \\ &= 3^kA = 3^{(k+1)-1}A \end{aligned}$$

よって，$n = k+1$ のときも①が成り立つ.

[1], [2] から, すべての自然数 n について①が成り立つ.

以上より，$\boldsymbol{A^n = 3^{n-1}A}$

3. （1） 左辺 $= \dfrac{1}{\cos^2\theta-(-\sin^2\theta)}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

右辺 $= \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

よって，左辺 $=$ 右辺

（2）
$$\text{左辺}=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & -(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\\ \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\\ \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{pmatrix}$$
$$\text{右辺}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta\\ \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta\end{pmatrix}$$

よって，左辺 $=$ 右辺

4. A は正則なので，逆行列 A^{-1} が存在して，$AA^{-1}=A^{-1}A=E$

${}^tA$ に，右から ${}^t(A^{-1})$ をかけると
$$\begin{aligned}{}^tA\,{}^t(A^{-1})&={}^t(A^{-1}A)\\&={}^tE=E\end{aligned}$$
${}^tA$ に，左から ${}^t(A^{-1})$ をかけると
$$\begin{aligned}{}^t(A^{-1}){}^tA&={}^t(AA^{-1})\\&={}^tE=E\end{aligned}$$
よって，${}^tA\,{}^t(A^{-1})={}^t(A^{-1}){}^tA=E$ であるから，${}^tA$ は正則であり，逆行列は ${}^t(A^{-1})$ となるので，$({}^tA)^{-1}={}^t(A^{-1})$

5. ※ 背理法によって証明する．

A が正則であると仮定すると，逆行列 A^{-1} が存在して，$AA^{-1}=E$

$A^n=O$ の両辺に，右から $(A^{-1})^n$ をかけると
$$A^n(A^{-1})^n=O(A^{-1})^n$$
ここで
$$\begin{aligned}\text{左辺}&=(\underbrace{AA\cdots A}_{n\text{ 個}})(\underbrace{A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}_{n\text{ 個}})\\&=\underbrace{AA\cdots A}_{(n-1)\text{ 個}}\ (AA^{-1})\ \underbrace{A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}_{(n-1)\text{ 個}}\\&=\underbrace{AA\cdots A}_{(n-1)\text{ 個}}\ E\ \underbrace{A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}_{(n-1)\text{ 個}}\\&=\underbrace{AA\cdots A}_{(n-1)\text{ 個}}\ \underbrace{A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}_{(n-1)\text{ 個}}\\&=\cdots\\&=AA^{-1}=E\end{aligned}$$
また，右辺 $=O$ であるから，$E=O$ となり，これは矛盾である．よって，行列 A は正則ではない。

6. （1）
$$\begin{aligned}\text{与式}&=E(E+A+A^2+\cdots+A^{n-1})\\&\quad-A(E+A+A^2+\cdots+A^{n-1})\\&=(E^2+EA+EA^2+\cdot+EA^{n-1})\\&\quad-(AE+A^2+A^3+\cdots+A^n)\\&=(E+A+A^2+\cdot+A^{n-1})\\&\quad-(A+A^2+A^3+\cdots+A^n)\\&=E-A^n=E-O=\boldsymbol{E}\end{aligned}$$

（2）
$$\begin{aligned}\text{与式}&=(E+A+A^2+\cdots+A^{n-1})E\\&\quad-(E+A+A^2+\cdots+A^{n-1})A\\&=(E^2+AE+A^2E+\cdots+A^{n-1}E)\\&\quad-(EA+A^2+A^3+\cdots+A^n)\\&=(E+A+A^2+\cdots+A^{n-1})\\&\quad-(A+A^2+A^3+\cdots+A^n)\\&=E-A^n=E-O=\boldsymbol{E}\end{aligned}$$

（3） $E+A+A^2+\cdots+A^{n-1}=B$ とおけば，（1），（2）より
$$(E-A)B=B(E-A)=E$$
よって，$E-A$ は正則であり，逆行列は
$$(E-A)^{-1}=B=\boldsymbol{E+A+A^2+\cdots+A^{n-1}}$$

■