# 2章　行列

§1　行列 (p.47〜p.65)

**問1**

$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ について

(1, 2) 成分は，$\boldsymbol{-2}$

(2, 1) 成分は，$\boldsymbol{0}$

$\begin{pmatrix} 90 & 85 \\ 72 & 51 \end{pmatrix}$ について

(1, 2) 成分は，**85**

(2, 1) 成分は，**72**

$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ について

(1, 2) 成分は，$\boldsymbol{b}$

(2, 1) 成分は，$\boldsymbol{d}$

**問2**

両辺の対応する成分がすべて等しいので

$$\begin{cases} a+2b=5 & \cdots ① \\ c+d=1 & \cdots ② \\ 3a-b=1 & \cdots ③ \\ 2c-3d=12 & \cdots ④ \end{cases}$$

$$\begin{array}{llrl} ① & & a+2b & =5 \\ ③\times 2 & +) & 6a-2b & =2 \\ \hline & & 7a & =7 \\ & & a & =1 \end{array}$$

これを ① に代入すると，$1+2b=5$ であるから，$b=2$

$$\begin{array}{llrl} ②\times 3 & & 3c+3d & =3 \\ ④ & +) & 2c-3d & =12 \\ \hline & & 5c & =15 \\ & & c & =3 \end{array}$$

これを ③ に代入すると，$3+d=1$ であるから，$d=-2$

以上より，$\boldsymbol{a=1,\ b=2,\ c=3,\ d=-2}$

**問3**

（1）　与式 $=\begin{pmatrix} 2+(-1) & 3+2 \\ 4+4 & 5+3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{8} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$

（2）　与式 $=\begin{pmatrix} 3+(-2) & 4+4 & 2+3 \\ -1+5 & 4+(-2) & 0+3 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{8} & \mathbf{5} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$

**問4**

（1）　与式 $=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2+4 & 3+2 & 4+3 \\ 5+(-1) & 2+0 & 6+2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{5} & \mathbf{7} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$

（2）　与式 $=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2+(-1)+4 & 3+2+2 & 4+4+3 \\ 5+3+(-1) & 2+2+0 & 6+5+2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{7} & \mathbf{11} \\ \mathbf{7} & \mathbf{4} & \mathbf{13} \end{pmatrix}$

**問5**

左辺 $=\begin{pmatrix} x+1+2 & 3+y \\ 8+w & z-1+0 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} x+3 & 3+y \\ 8+w & z-1 \end{pmatrix}$

よって，$\begin{pmatrix} x+3 & 3+y \\ 8+w & z-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

両辺の対応する成分がすべて等しいので

$$\begin{cases} x+3=2x & \cdots ① \\ 3+y=3 & \cdots ② \\ 8+w=5 & \cdots ③ \\ z-1=1 & \cdots ④ \end{cases}$$

① より，$\boldsymbol{x=3}$

② より，$\boldsymbol{y=0}$

③ より，$\boldsymbol{w=-3}$

④ より，$\boldsymbol{z=2}$

**問6**

（1）　与式 $=\begin{pmatrix} 0-1 & 2-2 & 3-(-1) \\ -1-4 & 4-5 & 2-2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

（2）　与式 $=\begin{pmatrix} 3-5 & 2-2 \\ 1-(-1) & 0-3 \\ 4-2 & -1-1 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$

**問 7**

（1） 与式 $= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2+(-1)-(-3) & 3+2-(-1) \\ 4+5-1 & 2+2-0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{6} \\ \mathbf{8} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$

（2） 与式 $= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2-(-1)-(-3) & 3-2-(-1) \\ 4-5-1 & 2-2-0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

（3） 与式 $= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2-(-1)+(-3) & 3-2+(-1) \\ 4-5+1 & 2-2+0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

**問 8** $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$ とする.

（Ⅰ） 左辺 $= k\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}\right\}$

$= k\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} k(a_{11}+b_{11}) & k(a_{12}+b_{12}) & k(a_{13}+b_{13}) \\ k(a_{21}+b_{21}) & k(a_{22}+b_{22}) & k(a_{23}+b_{23}) \end{pmatrix}$

右辺 $= k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} kb_{11} & kb_{12} & kb_{13} \\ kb_{21} & kb_{22} & kb_{23} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ka_{11}+kb_{11} & ka_{12}+kb_{12} & ka_{13}+kb_{13} \\ ka_{21}+kb_{21} & ka_{22}+kb_{22} & ka_{23}+kb_{23} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} k(a_{11}+b_{11}) & k(a_{12}+b_{12}) & k(a_{13}+b_{13}) \\ k(a_{21}+b_{21}) & k(a_{22}+b_{22}) & k(a_{23}+b_{23}) \end{pmatrix}$

よって，左辺 $=$ 右辺

（Ⅱ） 左辺 $= (k \pm l)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} (k\pm l)a_{11} & (k\pm l)a_{12} & (k\pm l)a_{13} \\ (k\pm l)a_{21} & (k\pm l)a_{22} & (k\pm l)a_{23} \end{pmatrix}$

右辺 $= k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \pm l\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} la_{11} & la_{12} & la_{13} \\ la_{21} & la_{22} & la_{23} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ka_{11}\pm la_{11} & ka_{12}\pm la_{12} & ka_{13}\pm la_{13} \\ ka_{21}\pm la_{21} & ka_{22}\pm la_{22} & ka_{23}\pm la_{23} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} (k\pm l)a_{11} & (k\pm l)a_{12} & (k\pm l)a_{13} \\ (k\pm l)a_{21} & (k\pm l)a_{22} & (k\pm l)a_{23} \end{pmatrix}$

よって，左辺 $=$ 右辺

（Ⅲ） 左辺 $= (kl)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} (kl)a_{11} & (kl)a_{12} & (kl)a_{13} \\ (kl)a_{21} & (kl)a_{22} & (kl)a_{23} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} kla_{11} & kla_{12} & kla_{13} \\ kla_{21} & kla_{22} & kla_{23} \end{pmatrix}$

右辺 $= k\left\{l\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\right\}$

$= k\begin{pmatrix} la_{11} & la_{12} & la_{13} \\ la_{21} & la_{22} & la_{23} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} kla_{11} & kla_{12} & kla_{13} \\ kla_{21} & kla_{22} & kla_{23} \end{pmatrix}$

よって，左辺 $=$ 右辺

**問 9**

（1） 与式 $= 4\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 12 & -4 & 16 \\ 8 & 12 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 12+(-1) & -4+4 & 16+5 \\ 8+3 & 12+(-2) & 0+(-3) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \mathbf{11} & \mathbf{0} & \mathbf{21} \\ \mathbf{11} & \mathbf{10} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$

（2） 与式 $= 3\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 9 & -3 & 12 \\ 6 & 9 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 8 & 10 \\ 6 & -4 & -6 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 9-(-2) & -3-8 & 12-10 \\ 6-6 & 9-(-4) & 0-(-6) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \mathbf{11} & \mathbf{-11} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{13} & \mathbf{6} \end{pmatrix}$

（3） 与式 $= 3A - B + A - 2B$

$$= 4A - 3B$$

$$= 4\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & -4 & 16 \\ 8 & 12 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 12 & 15 \\ 9 & -6 & -9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12-(-3) & -4-12 & 16-15 \\ 8-9 & 12-(-6) & 0-(-9) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{15} & \mathbf{-16} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{18} & \mathbf{9} \end{pmatrix}$$

（4） 与式 $= B - A - 2A + 3B$

$$= -3A + 4B$$

$$= -3\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -9 & 3 & -12 \\ -6 & -9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 16 & 20 \\ 12 & -8 & -12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -9+(-4) & 3+16 & -12+20 \\ -6+12 & -9+(-8) & 0+(-12) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{-13} & \mathbf{19} & \mathbf{8} \\ \mathbf{6} & \mathbf{-17} & \mathbf{-12} \end{pmatrix}$$

**問 10**

$2A + 3X = 5B$ より

$3X = -2A + 5B$

$$X = \frac{1}{3}(-2A + 5B)$$

$$= \frac{1}{3}\left\{-2\begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ -10 & -2 & -12 \\ -2 & -6 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & -15 & -5 \\ 5 & -10 & -5 \\ 15 & -25 & -10 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 8+10 & -4+(-15) & 4+(-5) \\ -10+5 & -2+(-10) & -12+(-5) \\ -2+15 & -6+(-25) & -8+(-10) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 18 & -19 & -1 \\ -5 & -12 & -17 \\ 13 & -31 & -18 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{6} & -\frac{\mathbf{19}}{\mathbf{3}} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \\ -\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}} & \mathbf{-4} & -\frac{\mathbf{17}}{\mathbf{3}} \\ \frac{\mathbf{13}}{\mathbf{3}} & -\frac{\mathbf{31}}{\mathbf{3}} & \mathbf{-6} \end{pmatrix}$$

**問 11**

（1） 与式 $= \begin{pmatrix} 2\cdot 2+(-1)\cdot(-1) & 2\cdot 4+(-1)\cdot 1 \\ 3\cdot 2+5\cdot(-1) & 3\cdot 4+5\cdot 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 4+1 & 8-1 \\ 6-5 & 12+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{7} \\ \mathbf{1} & \mathbf{17} \end{pmatrix}$$

（2） 与式 $= \begin{pmatrix} 2\cdot 3+3\cdot 2 \\ 4\cdot 3+1\cdot 2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 6+6 \\ 12+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{12} \\ \mathbf{14} \end{pmatrix}$$

（3） 与式 $= (1\cdot 3 + 2\cdot 4)$

$$= (3+8) = (11) = \mathbf{11}$$

（4） 与式 $= \begin{pmatrix} 1\cdot 4+2\cdot 2 & 1\cdot 1+2\cdot 5 & 1\cdot 1+2\cdot 3 \\ 4\cdot 4+3\cdot 2 & 4\cdot 1+3\cdot 5 & 4\cdot 1+3\cdot 3 \\ 3\cdot 4+1\cdot 2 & 3\cdot 1+1\cdot 5 & 3\cdot 1+1\cdot 3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 4+4 & 1+10 & 1+6 \\ 16+6 & 4+15 & 4+9 \\ 12+2 & 3+5 & 3+3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{11} & \mathbf{7} \\ \mathbf{22} & \mathbf{19} & \mathbf{13} \\ \mathbf{14} & \mathbf{8} & \mathbf{6} \end{pmatrix}$$

（5） 与式 $= \begin{pmatrix} 4\cdot 1+1\cdot 4+1\cdot 3 & 4\cdot 2+1\cdot 3+1\cdot 1 \\ 2\cdot 1+5\cdot 4+3\cdot 3 & 2\cdot 2+5\cdot 3+3\cdot 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 4+4+3 & 8+3+1 \\ 2+20+9 & 4+15+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{11} & \mathbf{12} \\ \mathbf{31} & \mathbf{22} \end{pmatrix}$$

（6） 与式 $= \begin{pmatrix} 1\cdot 2 & 1\cdot 3 & 1\cdot(-1) \\ 5\cdot 2 & 5\cdot 3 & 5\cdot(-1) \\ 1\cdot 2 & 1\cdot 3 & 1\cdot(-1) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{10} & \mathbf{15} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

**問 12** $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ とする.

（I） $k(AB) = k\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right\}$

$$= k\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}) & k(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}) \\ k(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}) & k(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}) \\ k(a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}) & k(a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}) \end{pmatrix}$$

$$(kA)B = \left\{k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \\ ka_{31} & ka_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ka_{11}b_{11} + ka_{12}b_{21} & ka_{11}b_{12} + ka_{12}b_{22} \\ ka_{21}b_{11} + ka_{22}b_{21} & ka_{21}b_{12} + ka_{22}b_{22} \\ ka_{31}b_{11} + ka_{32}b_{21} & ka_{31}b_{12} + ka_{32}b_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) & k(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) \\ k(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) & k(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) \\ k(a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21}) & k(a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22}) \end{pmatrix}$$

$$A(kB) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\left\{k\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} kb_{11} & kb_{12} \\ kb_{21} & kb_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot kb_{11} + a_{12} \cdot kb_{21} & a_{11} \cdot kb_{12} + a_{12} \cdot kb_{22} \\ a_{21} \cdot kb_{11} + a_{22} \cdot kb_{21} & a_{21} \cdot kb_{12} + a_{22} \cdot kb_{22} \\ a_{31} \cdot kb_{11} + a_{32} \cdot kb_{21} & a_{31} \cdot kb_{12} + a_{32} \cdot kb_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ka_{11}b_{11} + ka_{12}b_{21} & ka_{11}b_{12} + ka_{12}b_{22} \\ ka_{21}b_{11} + ka_{22}b_{21} & ka_{21}b_{12} + ka_{22}b_{22} \\ ka_{31}b_{11} + ka_{32}b_{21} & ka_{31}b_{12} + ka_{32}b_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) & k(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) \\ k(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) & k(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) \\ k(a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21}) & k(a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22}) \end{pmatrix}$$

したがって，$k(AB) = (kA)B = A(kB)$

(III) 左辺 $= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\right\}$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} + c_{11} & b_{12} + c_{12} \\ b_{21} + c_{21} & b_{22} + c_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}(b_{11} + c_{11}) + a_{12}(b_{21} + c_{21}) & a_{11}(b_{12} + c_{12}) + a_{12}(b_{22} + c_{22}) \\ a_{21}(b_{11} + c_{11}) + a_{22}(b_{21} + c_{21}) & a_{21}(b_{12} + c_{12}) + a_{22}(b_{22} + c_{22}) \\ a_{31}(b_{11} + c_{11}) + a_{32}(b_{21} + c_{21}) & a_{31}(b_{12} + c_{12}) + a_{32}(b_{22} + c_{22}) \end{pmatrix}$$

右辺 $= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} & a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} \\ a_{21}c_{11} + a_{22}c_{21} & a_{21}c_{12} + a_{22}c_{22} \\ a_{31}c_{11} + a_{32}c_{21} & a_{31}c_{12} + a_{32}c_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{21}c_{11} + a_{22}c_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{21}c_{12} + a_{22}c_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{31}c_{11} + a_{32}c_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{31}c_{12} + a_{32}c_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}(b_{11} + c_{11}) + a_{12}(b_{21} + c_{21}) & a_{11}(b_{12} + c_{12}) + a_{12}(b_{22} + c_{22}) \\ a_{21}(b_{11} + c_{11}) + a_{22}(b_{21} + c_{21}) & a_{21}(b_{12} + c_{12}) + a_{22}(b_{22} + c_{22}) \\ a_{31}(b_{11} + c_{11}) + a_{32}(b_{21} + c_{21}) & a_{31}(b_{12} + c_{12}) + a_{32}(b_{22} + c_{22}) \end{pmatrix}$$

よって，左辺 $=$ 右辺

**問 13**

(1) $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$K^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$-L^2 = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 & 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

よって，$J^2 = K^2 = -L^2 = E$

（2） $LJ = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0\cdot 1 + (-1)\cdot 0 & 0\cdot 0 + (-1)\cdot(-1) \\ 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & 1\cdot 0 + 0\cdot 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = K$

$-JL = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= -\begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 0\cdot 1 & 1\cdot(-1) + 0\cdot 0 \\ 0\cdot 0 + (-1)\cdot 1 & 0\cdot(-1) + (-1)\cdot 0 \end{pmatrix}$

$= -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = K$

よって，$LJ = -LK = K$

（3） $KJ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot 0 + 1\cdot(-1) \\ 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & 1\cdot 0 + 0\cdot(-1) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = L$

$-JK = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= -\begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 0\cdot 1 & 1\cdot 1 + 0\cdot 0 \\ 0\cdot 0 + (-1)\cdot 1 & 0\cdot 1 + (-1)\cdot 0 \end{pmatrix}$

$= -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = L$

よって，$KJ = -JK = L$

（4） $KL = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0\cdot 0 + 1\cdot 1 & 0\cdot(-1) + 1\cdot 0 \\ 1\cdot 0 + 0\cdot 1 & 1\cdot(-1) + 0\cdot 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = J$

$-LK = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= -\begin{pmatrix} 0\cdot 0 + (-1)\cdot 1 & 0\cdot 1 + (-1)\cdot 0 \\ 1\cdot 0 + 0\cdot 1 & 1\cdot 1 + 0\cdot 0 \end{pmatrix}$

$= -\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = J$

よって，$KL = -LK = J$

**問 14**

（1） 与式 $= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2\cdot 2 + 3\cdot 0 & 2\cdot 3 + 3\cdot 1 \\ 0\cdot 2 + 1\cdot 0 & 0\cdot 3 + 1\cdot 1 \end{pmatrix}$

$- \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + (-2)\cdot 3 & 1\cdot(-2) + (-2)\cdot 4 \\ 3\cdot 1 + 4\cdot 3 & 3\cdot(-2) + 4\cdot 4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 15 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{19} \\ \mathbf{-15} & \mathbf{-9} \end{pmatrix}$

（2） 与式 $= \left\{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right\}\left\{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right\}$

$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3\cdot 1 + 1\cdot(-3) & 3\cdot 5 + 1\cdot(-3) \\ 3\cdot 1 + 5\cdot(-3) & 3\cdot 5 + 5\cdot(-3) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{12} \\ \mathbf{-12} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

**問 15**

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0\cdot 0 + 3\cdot 0 & 0\cdot 3 + 3\cdot 0 \\ 0\cdot 0 + 0\cdot 0 & 0\cdot 3 + 0\cdot 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$

$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0\cdot 0 + 5\cdot 0 & 0\cdot 5 + 5\cdot 0 \\ 0\cdot 0 + 0\cdot 0 & 0\cdot 5 + 0\cdot 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$

$AB = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0\cdot 0 + 3\cdot 0 & 0\cdot 5 + 3\cdot 0 \\ 0\cdot 0 + 0\cdot 0 & 0\cdot 5 + 0\cdot 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$

よって，$A^2 = B^2 = AB = O$

**問 16**

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 1\cdot 1 & 1\cdot 0 + 1\cdot 1 \\ 2\cdot 0 + 2\cdot 1 & 2\cdot 0 + 2\cdot 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0+1\cdot 1 & 1\cdot 1+1\cdot 0 \\ 2\cdot 0+2\cdot 1 & 2\cdot 1+2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

よって，$AB = AC$, $A \fallingdotseq O$ であっても，$B = C$ とは限らない．

**問 17**

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cdot a+b\cdot c & a\cdot b+b\cdot 0 \\ c\cdot a+0\cdot c & c\cdot b+0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab \\ ca & bc \end{pmatrix}$$

よって，$A^2 = O$ となるための条件は

$$\begin{cases} a^2+bc=0 & \cdots ① \\ ab=0 & \cdots ② \\ ca=0 & \cdots ③ \\ bc=0 & \cdots ④ \end{cases}$$

④ を ① に代入すると，$a^2 = 0$ であるから，$a = 0$

$a = 0$ のとき，②, ③ は任意の $b$, $c$ について成り立つので，求める条件は，$\boldsymbol{a = 0}$ **かつ** $\boldsymbol{bc = 0}$

**問 18**

$${}^t\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{2} \end{pmatrix}, \quad {}^t\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

$${}^t\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad {}^t\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

$${}^t\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad {}^t\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{5} \end{pmatrix}$$

**問 19** $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$ とする．

（I）

$$左辺 = {}^t\left\{ {}^t\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \right\} = {}^t\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = A = 右辺$$

（II）

$$左辺 = {}^t\left\{ k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \right\} = {}^t\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{21} \\ ka_{12} & ka_{22} \\ ka_{13} & ka_{23} \end{pmatrix}$$

$$右辺 = k\left\{ {}^t\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \right\} = k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{21} \\ ka_{12} & ka_{22} \\ ka_{13} & ka_{23} \end{pmatrix}$$

よって，左辺 = 右辺

（III）

$$左辺 = {}^t\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} \right\} = {}^t\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} \\ a_{13}+b_{13} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}$$

$$右辺 = {}^t\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + {}^t\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \\ b_{13} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} \\ a_{13}+b_{13} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}$$

よって，左辺 = 右辺

**問 20**

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+0 & 1-6 \\ 6+0 & 2+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2 & -9+4 \\ 0+4 & 0+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

よって

$${}^t(AB) = {}^t\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{6} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{10} \end{pmatrix}$$

$${}^t(BA) = {}^t\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$$

$${}^tA\,{}^tB = {}^t\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}{}^t\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2 & 0+4 \\ -9+4 & 0+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$$

$$ {}^tB{}^tA = {}^t\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} {}^t\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} $$
$$ = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} $$
$$ = \begin{pmatrix} 3+0 & 6+0 \\ 1-6 & 2+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{6} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{10} \end{pmatrix} $$

**問 21** ${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

（1） $A$ が対称行列であるための条件は，${}^tA = A$

すなわち，$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ であるから

$$ \begin{cases} a = a & \cdots ① \\ c = b & \cdots ② \\ b = c & \cdots ③ \\ d = d & \cdots ④ \end{cases} $$

①，④ は常に成り立つので，求める条件は，$\boldsymbol{b = c}$

（2） $A$ が交代行列であるための条件は，${}^tA = -A$

すなわち，$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$ であるから

$$ \begin{cases} a = -a & \cdots ① \\ c = -b & \cdots ② \\ b = -c & \cdots ③ \\ d = -d & \cdots ④ \end{cases} $$

①，④ より，$a = d = 0$

よって，求める条件は，$\boldsymbol{a = d = 0,\ b = -c}$

**問 22**

（1） $A$，$B$ が対称行列であるから，${}^tA = A$，${}^tB = B$

よって

$$ {}^t(kA + lB) = {}^t(kA) + {}^t(lB) $$
$$ = k{}^tA + l{}^tB $$
$$ = kA + lB $$

したがって，${}^t(kA + lB) = kA + lB$ であるから，$kA + lB$ は対称行列である．

（2） $A$，$B$ が交代行列であるから，${}^tA = -A$，${}^tB = -B$

よって

$$ {}^t(kA + lB) = {}^t(kA) + {}^t(lB) $$
$$ = k{}^tA + l{}^tB $$
$$ = k(-A) + l(-B) $$
$$ = -kA - lB = -(kA + lB) $$

したがって，${}^t(kA + lB) = -(kA + lB)$ であるから，$kA + lB$ は交代行列である．

**問 23**

（1） $2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = -2 \neq 0$ であるから，**正則である**．

逆行列は，$\dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$

（2） $2 \cdot 3 - 6 \cdot 1 = 0$ であるから，**正則ではない**．

（3） $1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 \neq 0$ であるから，**正則である**．

逆行列は，$\dfrac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

**問 24** $8 \cdot 3 - 7 \cdot 2 = 10 \neq 0$ であるから，$A$ は正則で

$$ A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} $$

（1） $AX = B$ の両辺に左から $A^{-1}$ をかけると

$$ A^{-1}AX = A^{-1}B $$
$$ EX = A^{-1}B $$
$$ X = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} $$
$$ = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9-14 & -3-7 \\ -6+16 & 2+8 \end{pmatrix} $$
$$ = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -5 & -10 \\ 10 & 10 \end{pmatrix} $$
$$ = \begin{pmatrix} -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} $$

（2） $YA = B$ の両辺に右から $A^{-1}$ をかけると

$$ YAA^{-1} = BA^{-1} $$
$$ YE = BA^{-1} $$
$$ Y = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\left\{\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}\right\} $$
$$ = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} $$
$$ = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9+2 & -21-8 \\ 6-2 & -14+8 \end{pmatrix} $$
$$ = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 11 & -29 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} $$
$$ = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{10}} & -\frac{\mathbf{29}}{\mathbf{10}} \\ \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}} & -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}} \end{pmatrix} $$

**問 25**

$$ AB = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} $$
$$ = \begin{pmatrix} 15+2 & 35+4 \\ 6+1 & 14+2 \end{pmatrix} $$
$$ = \begin{pmatrix} 17 & 39 \\ 7 & 16 \end{pmatrix} $$
$$ A^{-1} = \frac{1}{5 \cdot 1 - 2 \cdot 2}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} $$
$$ = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} $$
$$ B^{-1} = \frac{1}{3 \cdot 2 - 7 \cdot 1}\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} $$
$$ = -\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} $$

（1） 与式 $= \begin{pmatrix} 17 & 39 \\ 7 & 16 \end{pmatrix}^{-1}$

$$= \frac{1}{17 \cdot 16 - 39 \cdot 7} \begin{pmatrix} 16 & -39 \\ -7 & 17 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{272 - 273} \begin{pmatrix} 16 & -39 \\ -7 & 17 \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} 16 & -39 \\ -7 & 17 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{-16} & \mathbf{39} \\ \mathbf{7} & \mathbf{-17} \end{pmatrix}$$

（2） 与式 $= \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -2-14 & 4+35 \\ 1+6 & -2-15 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{-16} & \mathbf{39} \\ \mathbf{7} & \mathbf{-17} \end{pmatrix}$$

（3） 与式 $= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -2-2 & 7+6 \\ 4+5 & -14-15 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{-4} & \mathbf{13} \\ \mathbf{9} & \mathbf{-29} \end{pmatrix}$$

∎