2章　行列

BASIC

103（1）　(1, 2) 成分は，$\boldsymbol{-4}$
(2, 1) 成分は，$\boldsymbol{3}$

（2）　(1, 2) 成分は，$\boldsymbol{5}$
(2, 1) 成分は，$\boldsymbol{1}$

104　両辺の対応する成分がすべて等しいので

$$\begin{cases} 2a-b=3a+b & \cdots① \\ c=d-5 & \cdots② \\ b-1=a+2 & \cdots③ \\ 2d+1=c & \cdots④ \end{cases}$$

① より，$a+2b=0\cdots①'$
③ より，$a-b=-3\cdots③'$

$$\begin{array}{rrl} ①' & a+2b & =0 \\ ③' & -)\ \ a-\ \ b & =-3 \\ \hline & 3b & =3 \\ & b & =1 \end{array}$$

これを ③′ に代入すると，$a-1=-3$ であるから，$a=-2$
②，④ より
$d-5=2d+1$
これより，$d=-6$
これを ② に代入すると，$c=-6-5=-11$
以上より，$\boldsymbol{a=-2,\ b=1,\ c=-11,\ d=-6}$

105（1）

$$与式=\begin{pmatrix} 3+(-2) & 1+3 \\ 2+3 & 5+(-4) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{4} \\ \boldsymbol{5} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$$

（2）

$$与式=\begin{pmatrix} -2+1 & -3+(-5) \\ 3+(-2) & 4+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{-8} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{7} \end{pmatrix}$$

（3）

$$与式=\begin{pmatrix} 1+3 & 2+1 & 2+0 \\ 2+0 & 3+1 & 1+(-4) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{4} & \boldsymbol{3} & \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{2} & \boldsymbol{4} & \boldsymbol{-3} \end{pmatrix}$$

（4）

$$与式=\begin{pmatrix} 2+3 \\ 1+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{5} \\ \boldsymbol{3} \end{pmatrix}$$

（5）

$$与式=\begin{pmatrix} -4+2+3 \\ 1+6+(-3) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{4} \end{pmatrix}$$

（6）

$$与式=(3+0\quad 4+2\quad 1+2)=\boldsymbol{(3\quad 6\quad 3)}$$

106

$$左辺=\begin{pmatrix} 2x-1+1 & 1+(-y+1) \\ w+4+(w-1) & 2z+(-2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x & -y+2 \\ 2w+3 & 2z-2 \end{pmatrix}$$

よって，$\begin{pmatrix} 2x & -y+2 \\ 2w+3 & 2z-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -w & z+1 \end{pmatrix}$

両辺の対応する成分がすべて等しいので

$$\begin{cases} 2x=3 & \cdots① \\ -y+2=-2 & \cdots② \\ 2w+3=-w & \cdots③ \\ 2z-2=z+1 & \cdots④ \end{cases}$$

① より，$\boldsymbol{x=\dfrac{3}{2}}$
② より，$\boldsymbol{y=4}$
④ より，$\boldsymbol{z=3}$
③ より，$\boldsymbol{w=-1}$

107（1）

$$与式=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+0 & -1+2 \\ 3+1 & 1+5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{2} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{4} & \boldsymbol{6} \end{pmatrix}$$

（2）

$$与式=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0-2 & 2-(-1) \\ 1-3 & 5-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{-2} & \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{-2} & \boldsymbol{4} \end{pmatrix}$$

（3）

$$与式=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2-0+(-2) & -1-2+1 \\ 3-1+3 & 1-5+(-4) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-2} \\ \boldsymbol{5} & \boldsymbol{-8} \end{pmatrix}$$

108（1）

$$与式=k\left\{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\right\}=k\begin{pmatrix} 1+3 & 4+(-2) \\ -2+4 & 5+0 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{4k} & \boldsymbol{2k} \\ \boldsymbol{2k} & \boldsymbol{5k} \end{pmatrix}$$

（2）

$$与式=k\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k & 4k \\ -2k & 5k \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3k & -2k \\ 4k & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} k+3k & 4k+(-2k) \\ -2k+4k & 5k+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{4k} & \boldsymbol{2k} \\ \boldsymbol{2k} & \boldsymbol{5k} \end{pmatrix}$$

109（1）　与式 $=3\begin{pmatrix}3&2\\1&0\\2&1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-1&0\\2&3\\1&-2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}9&6\\3&0\\6&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&0\\4&6\\2&-4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}9+(-2)&6+0\\3+4&0+6\\6+2&3+(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{7}&\mathbf{6}\\\mathbf{7}&\mathbf{6}\\\mathbf{8}&\mathbf{-1}\end{pmatrix}$

（2）　与式 $=2A+3B-6B+2A$

$=4A-3B$

$=4\begin{pmatrix}3&2\\1&0\\2&1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}-1&0\\2&3\\1&-2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}12&8\\4&0\\8&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3&0\\6&9\\3&-6\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}12-(-3)&8-0\\4-6&0-9\\8-3&4-(-6)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{15}&\mathbf{8}\\\mathbf{-2}&\mathbf{-9}\\\mathbf{5}&\mathbf{10}\end{pmatrix}$

（3）　与式 $=5B-5A-4B+2A$

$=-3A+B$

$=-3\begin{pmatrix}3&2\\1&0\\2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0\\2&3\\1&-2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-9&-6\\-3&0\\-6&-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0\\2&3\\1&-2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-9+(-1)&-6+0\\-3+2&0+3\\-6+1&-3+(-2)\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\mathbf{-10}&\mathbf{-6}\\\mathbf{-1}&\mathbf{3}\\\mathbf{-5}&\mathbf{-5}\end{pmatrix}$

（4）　与式 $=\frac{1}{2}A+\frac{1}{3}B+\frac{1}{3}A+\frac{2}{3}B$

$=\frac{5}{6}A+B=\frac{1}{6}(5A+6B)$

$=\frac{1}{6}\left\{5\begin{pmatrix}3&2\\1&0\\2&1\end{pmatrix}+6\begin{pmatrix}-1&0\\2&3\\1&-2\end{pmatrix}\right\}$

$=\frac{1}{6}\left\{\begin{pmatrix}15&10\\5&0\\10&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6&0\\12&18\\6&-12\end{pmatrix}\right\}$

$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}15+(-6)&10+0\\5+12&0+18\\10+6&5+(-12)\end{pmatrix}$

$=\mathbf{\frac{1}{6}}\begin{pmatrix}\mathbf{9}&\mathbf{10}\\\mathbf{17}&\mathbf{18}\\\mathbf{16}&\mathbf{-7}\end{pmatrix}$

110　$X+A-3B=-X+2A$ より

$2X=A+3B$

$X=\frac{1}{2}(A+3B)$

$=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}1&-1&3\\5&2&1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-2&3&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\right\}$

$=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}1&-1&3\\5&2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6&9&3\\0&3&-3\end{pmatrix}\right\}$

$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+(-6)&-1+9&3+3\\5+0&2+3&1+(-3)\end{pmatrix}$

$=\mathbf{\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}\mathbf{-5}&\mathbf{8}&\mathbf{6}\\\mathbf{5}&\mathbf{5}&\mathbf{-2}\end{pmatrix}$

111（1）　与式 $=\begin{pmatrix}3\cdot1+2\cdot2&3\cdot2+2\cdot3\\1\cdot1+4\cdot2&1\cdot2+4\cdot3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3+4&6+6\\1+8&2+12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{7}&\mathbf{12}\\\mathbf{9}&\mathbf{14}\end{pmatrix}$

（2）　与式 $=\begin{pmatrix}-2\cdot3+1\cdot(-2)&-2\cdot(-1)+1\cdot2\\0\cdot3+(-1)\cdot(-2)&0\cdot(-1)+(-1)\cdot2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-6-2&2+2\\0+2&0-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{-8}&\mathbf{4}\\\mathbf{2}&\mathbf{-2}\end{pmatrix}$

（3）　与式 $=(2\cdot3+3\cdot5\quad 2\cdot4+3\cdot6)$

$=(6+15\quad 8+18)=(\mathbf{21}\quad\mathbf{26})$

（4）　与式 $=\begin{pmatrix}3\cdot3+2\cdot1\\5\cdot3+(-1)\cdot1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}9+2\\15+(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{11}\\\mathbf{14}\end{pmatrix}$

（5）　与式 $=\begin{pmatrix}0\cdot2+1\cdot4&0\cdot(-3)+1\cdot1&0\cdot1+1\cdot(-1)\\2\cdot2+4\cdot4&2\cdot(-3)+4\cdot1&2\cdot1+4\cdot(-1)\\-1\cdot2+3\cdot4&-1\cdot(-3)+3\cdot1&-1\cdot1+3\cdot(-1)\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0+4&0+1&0+(-1)\\4+16&-6+4&2+(-4)\\-2+12&3+3&-1+(-3)\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\mathbf{4}&\mathbf{1}&\mathbf{-1}\\\mathbf{20}&\mathbf{-2}&\mathbf{-2}\\\mathbf{10}&\mathbf{6}&\mathbf{-4}\end{pmatrix}$

（6）　与式 $=\begin{pmatrix}1\cdot2+2\cdot0&1\cdot(-2)+2\cdot1&1\cdot3+2\cdot4\\4\cdot2+0\cdot0&4\cdot(-2)+0\cdot1&4\cdot3+0\cdot4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2+0&-2+2&3+8\\8+0&-8+0&12+0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{0}&\mathbf{11}\\\mathbf{8}&\mathbf{-8}&\mathbf{12}\end{pmatrix}$

112（1）　与式 $=\left\{\begin{pmatrix}-2&1\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-2&4\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}3&2\\4&1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}-2\cdot1+1\cdot(-2)&-2\cdot2+1\cdot4\\2\cdot1+3\cdot(-2)&2\cdot2+3\cdot4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\4&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2+(-2)&-4+4\\2+(-6)&4+12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\4&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-4&0\\-4&16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\4&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-4\cdot3+0\cdot4&-4\cdot2+0\cdot1\\-4\cdot3+16\cdot4&-4\cdot2+16\cdot1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-12+0&-8+0\\-12+64&-8+16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{-12}&\mathbf{-8}\\\mathbf{52}&\mathbf{8}\end{pmatrix}$$

（2）　与式 $=\begin{pmatrix}-2&1\\2&3\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}1&2\\-2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\4&1\end{pmatrix}\right\}$

$$=\begin{pmatrix}-2&1\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\cdot3+2\cdot4&1\cdot2+2\cdot1\\-2\cdot3+4\cdot4&-2\cdot2+4\cdot1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2&1\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3+8&2+2\\-6+16&-4+4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2&1\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11&4\\10&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2\cdot11+1\cdot10&-2\cdot4+1\cdot0\\2\cdot11+3\cdot10&2\cdot4+3\cdot0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-22+10&-8+0\\22+30&8+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{-12}&\mathbf{-8}\\\mathbf{52}&\mathbf{8}\end{pmatrix}$$

113　$A^2=\begin{pmatrix}-1&2\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\3&1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}-1\cdot(-1)+2\cdot3&-1\cdot2+2\cdot1\\3\cdot(-1)+1\cdot3&3\cdot2+1\cdot1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1+6&-2+2\\-3+3&6+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{7}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{7}\end{pmatrix}$$

$A^3=A^2A$

$$=\begin{pmatrix}7&0\\0&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\3&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}7\cdot(-1)+0\cdot3&7\cdot2+0\cdot1\\0\cdot(-1)+7\cdot3&0\cdot2+7\cdot1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-7+0&14+0\\0+21&0+7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{-7}&\mathbf{14}\\\mathbf{21}&\mathbf{7}\end{pmatrix}$$

114　※ 繰り返し使う行列を最初に求めておきます.

$A^2=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1+0\cdot(-1)&1\cdot0+0\cdot1\\-1\cdot1+1\cdot(-1)&-1\cdot0+1\cdot1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1+0&0+0\\-1+(-1)&0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}$$

$B^2=\begin{pmatrix}2&1\\3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\3&0\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot2+1\cdot3&2\cdot1+1\cdot0\\3\cdot2+0\cdot3&3\cdot1+0\cdot0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4+3&2+0\\6+0&3+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&2\\6&3\end{pmatrix}$$

$AB=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\3&0\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot2+0\cdot3&1\cdot1+0\cdot0\\-1\cdot2+1\cdot3&-1\cdot1+1\cdot0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2+0&1+0\\-2+3&-1+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

（1）　与式 $=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&1\\3&0\end{pmatrix}\right\}^2$

$$=\begin{pmatrix}1+2&0+1\\-1+3&1+0\end{pmatrix}^2$$

$$=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot3+1\cdot2&3\cdot1+1\cdot1\\2\cdot3+1\cdot2&2\cdot1+1\cdot1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}9+2&3+1\\6+2&2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{11}&\mathbf{4}\\\mathbf{8}&\mathbf{3}\end{pmatrix}$$

（2）　与式 $=\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7&2\\6&3\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&2\\2&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7&2\\6&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1+4+7&0+2+2\\-2+2+6&1+(-2)+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{12}&\mathbf{4}\\\mathbf{6}&\mathbf{2}\end{pmatrix}$$

（3）　与式 $=\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}^2$

$$=\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot2+1\cdot1&2\cdot1+1\cdot(-1)\\1\cdot2+(-1)\cdot1&1\cdot1+(-1)\cdot(-1)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4+1&2+(-1)\\2+(-1)&1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{5}&\mathbf{1}\\\mathbf{1}&\mathbf{2}\end{pmatrix}$$

（4）　与式 $=\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&2\\6&3\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot7+0\cdot6&1\cdot2+0\cdot3\\-2\cdot7+1\cdot6&-2\cdot2+1\cdot3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}7+0&2+0\\-14+6&-4+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{7}&\mathbf{2}\\\mathbf{-8}&\mathbf{-1}\end{pmatrix}$$

（5）　与式 $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1\cdot 2+0\cdot 3 & 1\cdot 1+0\cdot 0 \\ -2\cdot 2+1\cdot 3 & -2\cdot 1+1\cdot 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2+0 & 1+0 \\ -4+3 & -2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$

（6）　与式 $= (AB)A$

$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2\cdot 1+1\cdot(-1) & 2\cdot 0+1\cdot 1 \\ 1\cdot 1+(-1)\cdot(-1) & 1\cdot 0+(-1)\cdot 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2+(-1) & 0+1 \\ 1+1 & 0+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

115（1）　$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1\cdot 0+0\cdot 1 & 1\cdot 0+0\cdot 2 \\ 2\cdot 0+0\cdot 1 & 2\cdot 0+0\cdot 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

（2）　$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0\cdot 1+0\cdot 2 & 0\cdot 0+0\cdot 0 \\ 1\cdot 1+2\cdot 2 & 1\cdot 0+2\cdot 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1+4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{5} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

116（1）　$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2\cdot 3+1\cdot 2 & 2\cdot 1+1\cdot 2 \\ 4\cdot 3+2\cdot 2 & 4\cdot 1+2\cdot 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 6+2 & 2+2 \\ 12+4 & 4+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{4} \\ \mathbf{16} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$

（2）　$AC = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2\cdot 2+1\cdot 4 & 2\cdot(-1)+1\cdot 6 \\ 4\cdot 2+2\cdot 4 & 4\cdot(-1)+2\cdot 6 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4+4 & -2+6 \\ 8+8 & -4+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{4} \\ \mathbf{16} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$

117　$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a\cdot a+b\cdot 0 & a\cdot b+b\cdot d \\ 0\cdot a+d\cdot 0 & 0\cdot b+d\cdot d \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a^2 & ab+bd \\ 0 & d^2 \end{pmatrix}$

よって，$A^2 = O$ となるための条件は

$$\begin{cases} a^2 = 0 & \cdots ① \\ ab+bd = 0 & \cdots ② \\ d^2 = 0 & \cdots ③ \end{cases}$$

① より，$a = 0$

③ より，$d = 0$

$a = 0,\ d = 0$ のとき，② は任意の b について成り立つので，求める条件は，$\boldsymbol{a = 0}$ **かつ** $\boldsymbol{d = 0}$

118（1）　${}^tA = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$

（2）　${}^tB = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{7} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

（3）　${}^tC = \begin{pmatrix} \mathbf{-3} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$

119　${}^tA = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$，${}^tB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

（1）　与式 $= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3+2 & 0+1 \\ -2+0 & 4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$

（2）　$AB = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3\cdot 2+(-2)\cdot 1 & 3\cdot 0+(-2)\cdot 3 \\ 0\cdot 2+4\cdot 1 & 0\cdot 0+4\cdot 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 6+(-2) & 0+(-6) \\ 0+4 & 0+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$

よって

与式 $= \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-6} & \mathbf{12} \end{pmatrix}$

（3）　与式 $= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 2\cdot 3+1\cdot(-2) & 2\cdot 0+1\cdot 4 \\ 0\cdot 3+3\cdot(-2) & 0\cdot 0+3\cdot 4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 6+(-2) & 0+4 \\ 0+(-6) & 0+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-6} & \mathbf{12} \end{pmatrix}$

（4）　与式 $= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3\cdot 2+0\cdot 0 & 3\cdot 1+0\cdot 3 \\ -2\cdot 2+4\cdot 0 & -2\cdot 1+4\cdot 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 6+0 & 3+0 \\ -4+0 & -2+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{10} \end{pmatrix}$

120　与えられた正方行列を A とすると，${}^tA = \begin{pmatrix} 0 & -1 & c \\ a & 1 & 3 \\ 2 & b & 2 \end{pmatrix}$

A が対称行列ならば，${}^tA = A$ であるから

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & c \\ a & 1 & 3 \\ 2 & b & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 2 \\ -1 & 1 & b \\ c & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

両辺の成分を比べ，恒等式，および重複する式を省けば

$$\begin{cases} -1 = a \\ c = 2 \\ 3 = b \end{cases}$$

よって，$\boldsymbol{a = -1,\ b = 3,\ c = 2}$

121　A が対称行列であるから，${}^tA = A \cdots ①$

${}^tA$ が交代行列であるから，${}^t({}^tA) = -{}^tA$

これより，$A = -{}^tA \cdots ②$

①, ② より，$A = -A$

よって，$2A = O$ となるので，$A = O$，すなわち，A は零行列である．

122（1）　$2\cdot3-0\cdot0=6\neq0$ であるから，**正則である**.

逆行列は，$\boldsymbol{\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}}$

（2）　$4\cdot(-1)-2\cdot(-2)=0$ であるから，**正則ではない**.

（3）　$1\cdot2-4\cdot1=-2\neq0$ であるから，**正則である**.

逆行列は，$\dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix}2&-4\\-1&1\end{pmatrix} = \boldsymbol{-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}2&-4\\-1&1\end{pmatrix}}$

123（1）　A において，$1\cdot3-(-1)\cdot2=5\neq0$ であるから，A は正則で

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&1\\-2&1\end{pmatrix}$$

$AX=B$ の両辺に左から A^{-1} をかけると

$$\begin{aligned}A^{-1}AX&=A^{-1}B\\EX&=A^{-1}B\\X&=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&1\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-4&-1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}6-4&3-1\\-4-4&-2-1\end{pmatrix}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2&2\\-8&-3\end{pmatrix}}\end{aligned}$$

（2）　B において，$2\cdot(-1)-1\cdot(-4)=2\neq0$ であるから，B は正則で

$$B^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-1\\4&2\end{pmatrix}$$

$YB=A$ の両辺に右から B^{-1} をかけると

$$\begin{aligned}YBB^{-1}&=AB^{-1}\\YE&=AB^{-1}\\Y&=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-1\\4&2\end{pmatrix}\right\}\\&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1\\4&2\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1-4&-1-2\\-2+12&-2+6\end{pmatrix}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-5&-3\\10&4\end{pmatrix}}\end{aligned}$$

124　$A^{-1}=\dfrac{1}{2\cdot3-(-1)\cdot1}\begin{pmatrix}3&1\\-1&2\end{pmatrix}=\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}3&1\\-1&2\end{pmatrix}$

$B^{-1}=\dfrac{1}{1\cdot3-2\cdot1}\begin{pmatrix}3&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2\\-1&1\end{pmatrix}$

（1）

$$\begin{aligned}AB&=\begin{pmatrix}2&-1\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2-1&4-3\\1+3&2+9\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&1\\4&11\end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\text{与式}&=\frac{1}{1\cdot11-1\cdot4}\begin{pmatrix}11&-1\\-4&1\end{pmatrix}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{7}\begin{pmatrix}11&-1\\-4&1\end{pmatrix}}\end{aligned}$$

（2）

$$\begin{aligned}\text{与式}&=\begin{pmatrix}3&-2\\-1&1\end{pmatrix}\left\{\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3&1\\-1&2\end{pmatrix}\right\}\\&=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3&-2\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\-1&2\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}9+2&3-4\\-3-1&-1+2\end{pmatrix}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{7}\begin{pmatrix}11&-1\\-4&1\end{pmatrix}}\end{aligned}$$

（3）

$$\begin{aligned}\text{与式}&=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-2\\-1&1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}9-1&-6+1\\-3-2&2+2\end{pmatrix}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{7}\begin{pmatrix}8&-5\\-5&4\end{pmatrix}}\end{aligned}$$

CHECK

125　両辺の対応する成分がすべて等しいので

$$\begin{cases}2a+2b=3b+3 & \cdots①\\4b=a+2 & \cdots②\\2=c+d & \cdots③\\2c+6d=-3d-3 & \cdots④\end{cases}$$

① より，$2a-b=3\cdots①'$

② より，$a-4b=-2\cdots②'$

$$\begin{array}{lrrl}①' & & 2a-\ \ b &=3\\ ②'\times2 & -) & 2a-8b &=-4\\ \hline & & 7b &=7\\ & & b &=1\end{array}$$

これを $②'$ に代入すると，$a-4=-2$ であるから，$a=2$

④ より，$2c+9d=-3\cdots④'$

$$\begin{array}{lrrl}④' & & 2c+9d &=-3\\ ③\times2 & -) & 2c+2d &=4\\ \hline & & 7d &=-7\\ & & b &=-1\end{array}$$

これを ③ に代入すると，$c+(-1)=2$ であるから，$c=3$

以上より，$\boldsymbol{a=2,\ b=1,\ c=3,\ d=-1}$

126（1） 与式 $= -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 6 \\ -4 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0+4+1 & -1+(-2)+5 \\ 3+0+4 & -2+6+(-2) \\ -4+(-4)+3 & -1+10+0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{2} \\ \mathbf{7} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{9} \end{pmatrix}$$

（2） 与式 $= 2A + 2B - 3A + 3B - 3C$

$$= -A + 5B - 3C$$

$$= -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 0 & 15 \\ -10 & 25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 15 \\ 12 & -6 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0+10-3 & -1+(-5)-15 \\ 3+0-12 & -2+15-(-6) \\ -4+(-10)-9 & -1+25-0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{-21} \\ \mathbf{-9} & \mathbf{19} \\ \mathbf{-23} & \mathbf{24} \end{pmatrix}$$

127（1） $2X - A = 3B - X$ より

$3X = A + 3B$

$$X = \frac{1}{3}(A + 3B)$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 3 & -3 \\ 6 & 0 & 15 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0+9 & 1+3 & -1+(-3) \\ 2+6 & 4+0 & 3+15 \end{pmatrix}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}}\begin{pmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{4} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{8} & \mathbf{4} & \mathbf{18} \end{pmatrix}$$

（2） $A - B + X = 2(X - A + B)$ より

$A - B + X = 2X - 2A + 2B$

$X = 3A - 3B$

$$= 3(A - B)$$

$$= 3\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= 3\begin{pmatrix} 0-3 & 1-1 & -1-(-1) \\ 2-2 & 4-0 & 3-5 \end{pmatrix}$$

$$= 3\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-9} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{12} & \mathbf{-6} \end{pmatrix}$$

128（1） 与式 $= (1\cdot 2 + 2\cdot(-1) \quad 1\cdot 1 + 2\cdot 3 \quad 1\cdot 0 + 2\cdot 1)$

$$= (2 + (-2) \quad 1 + 6 \quad 0 + 2) = (\mathbf{0} \quad \mathbf{7} \quad \mathbf{2})$$

（2） 与式 $= \begin{pmatrix} 1\cdot 2 & 1\cdot 1 & 1\cdot(-4) \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 1 & 2\cdot(-4) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{-8} \end{pmatrix}$$

（3） 与式 $= \begin{pmatrix} -1\cdot 4 + 3\cdot 1 \\ 2\cdot 4 + 4\cdot 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -4+3 \\ 8+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{12} \end{pmatrix}$$

（4） 与式 $= \begin{pmatrix} 3\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) & 3\cdot 4 + (-1)\cdot 5 \\ 2\cdot 2 + 4\cdot(-1) & 2\cdot 4 + 4\cdot 5 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 6+1 & 12+(-5) \\ 4+(-4) & 8+20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{7} \\ \mathbf{0} & \mathbf{28} \end{pmatrix}$$

129 ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, ${}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

（1） 与式 $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1+1 & 0+2 \\ -1+4 & 2+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

（2） $AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + (-1)\cdot 2 & 1\cdot 4 + (-1)\cdot(-1) \\ 0\cdot 1 + 2\cdot 2 & 0\cdot 4 + 2\cdot(-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+(-2) & 4+1 \\ 0+4 & 0+(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

よって

与式 $= \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$

（3） 与式 $= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) & 1\cdot 0 + 2\cdot 2 \\ 4\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) & 4\cdot 0 + (-1)\cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+(-2) & 0+4 \\ 4+1 & 0+(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$$

（4） 与式 $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 4 & 1\cdot 2 + 0\cdot(-1) \\ -1\cdot 1 + 2\cdot 4 & -1\cdot 2 + 2\cdot(-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+0 & 2+0 \\ -1+8 & -2+(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{7} & \mathbf{-4} \end{pmatrix}$$

130 それぞれの行列の成分を $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする.

${}^tA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad ad - bc = 0 - (-1) = 1$

${}^tB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad ad - bc = 0 - 0 = 0$

$${}^tC=\begin{pmatrix}2&-3\\-3&1\end{pmatrix},\quad ad-bc=2-9=-7$$

$${}^tD=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad ad-bc=1-0=1$$

（1）　対角行列で，対角成分がすべて 1 であるもの　$\boldsymbol{D}$

（2）　${}^tX=X$ となるもの　$\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{C},\ \boldsymbol{D}$

（3）　${}^tX=-X$ となるもの　$\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}$

（4）　正方行列で対角成分以外の成分が 0 であるもの　$\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{D}$
※ 対角成分が 0 であってもよい．

（5）　$ad-bc\fallingdotseq 0$ であるもの　$\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{C},\ \boldsymbol{D}$

（6）　すべての成分が 0 であるもの　$\boldsymbol{B}$

131　A が対称行列なので，${}^tA=A\cdots$①
$A+B$ が対称行列なので，${}^t(A+B)=A+B\cdots$②
また，B が交代行列なので，${}^tB=-B\cdots$③
② より，${}^tA+{}^tB=A+B$
左辺に ①，③ を代入して
$A-B=A+B$
これより，$2B=O$ であるから，$B=O$ である．

132　$A^{-1}=\dfrac{1}{4\cdot2-1\cdot3}\begin{pmatrix}2&-1\\-3&4\end{pmatrix}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}2&-1\\-3&4\end{pmatrix}$

$B^{-1}=\dfrac{1}{1\cdot2-(-3)\cdot1}\begin{pmatrix}2&3\\-1&1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}2&3\\-1&1\end{pmatrix}$

（1）　$AB=\begin{pmatrix}4&1\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3\\1&2\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}4+1&-12+2\\3+2&-9+4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}5&-10\\5&-5\end{pmatrix}$$

よって

$$与式=\frac{1}{5\cdot(-5)-(-10)\cdot5}\begin{pmatrix}-5&10\\-5&5\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}-5&10\\-5&5\end{pmatrix}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1&2\\-1&1\end{pmatrix}}$$

（2）　$与式=\left\{\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}2&3\\-1&1\end{pmatrix}\right\}\left\{\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}2&-1\\-3&4\end{pmatrix}\right\}$

$$=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}2&3\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\-3&4\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}4-9&-2+12\\-2-3&1+4\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}-5&10\\-5&5\end{pmatrix}=\boldsymbol{\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1&2\\-1&1\end{pmatrix}}$$

（3）　$与式=\left\{\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}2&-1\\-3&4\end{pmatrix}\right\}\left\{\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}2&3\\-1&1\end{pmatrix}\right\}$

$$=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}2&-1\\-3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\-1&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}4+1&6-1\\-6-4&-9+4\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}5&5\\-10&-5\end{pmatrix}=\boldsymbol{\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&1\\-2&-1\end{pmatrix}}$$

STEP UP

133　$\cos\theta\cdot(-\cos\theta)-\sin\theta\cdot\sin\theta=-(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=-1\fallingdotseq 0$ より，A は正則である．

また，$A^{-1}=\dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix}-\cos\theta&\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$

$$=\boldsymbol{\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\\sin\theta&-\cos\theta\end{pmatrix}}$$

134（1）　$左辺=(B^{-1}AB)(B^{-1}AB)$

$$=B^{-1}ABB^{-1}AB$$
$$=B^{-1}A(BB^{-1})AB$$
$$=B^{-1}AEAB$$
$$=B^{-1}AAB$$
$$=B^{-1}A^2B=右辺$$

（2）　$左辺=\{(B^{-1}A)B\}^{-1}$

$$=B^{-1}(B^{-1}A)^{-1}$$
$$=B^{-1}A^{-1}(B^{-1})^{-1}$$
$$=B^{-1}A^{-1}B=右辺$$

135　$AX+B=C$ より，$AX=C-B$
両辺に左から，A^{-1} をかけると，$A^{-1}AX=A^{-1}(C-B)$
すなわち，$X=A^{-1}(C-B)$
ここで，$A^{-1}=\dfrac{1}{1\cdot5-2\cdot3}\begin{pmatrix}5&-2\\-3&1\end{pmatrix}$

$$=-\begin{pmatrix}5&-2\\-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&2\\3&-1\end{pmatrix}$$

よって，$X=A^{-1}(C-B)$

$$=\begin{pmatrix}-5&2\\3&-1\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}2&0\\5&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-4&4\\1&2\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\begin{pmatrix}-5&2\\3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2-(-4)&0-4\\5-1&3-2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-5&2\\3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&-4\\4&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-30+8&20+2\\18-4&-12-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\begin{pmatrix}-22&22\\14&-13\end{pmatrix}}$$

136（1）　**正しくない．**

反例　$A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

※ 以下は確認のための計算で，解答としては不要

$A+B=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$，$A-B=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ であるから

$$\text{左辺}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0+1&-2+0\\0+2&-1+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2\\2&-1\end{pmatrix}$$

また，$A^2=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1+0&0+0\\1+1&0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$$

$$B^2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1+0&1+1\\0+0&0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$$

であるから

$$\text{右辺}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2\\2&0\end{pmatrix}$$

よって，$(A+B)(A-B)\neq A^2-B^2$

（2）　**正しくない．**

反例　$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}$

※ 以下は確認のための計算で，解答としては不要

$$AB=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0+0&1-1\\0+0&0+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O$$

これより，$AB=O$ であっても，$A=O$　または　$B=O$ とは限らない．

（3）　**正しい．**

$A^2+2A-E=O$ より，$A^2+2A=E$

これより，$A(A+2E)=E$，また，$(A+2E)A=E$

よって，$A^{-1}=A+2E$ であり，A は逆行列をもつから，正則である．

137　$AB=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}a+c&b+d\\0+c&0+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c&b+d\\c&d\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a+0&a+b\\c+0&c+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&a+b\\c&c+d\end{pmatrix}$$

よって，$AB=BA$ となるためには

$$\begin{cases}a+c=a & \cdots ①\\ b+d=a+b & \cdots ②\\ c=c & \cdots ③\\ d=c+d & \cdots ④\end{cases}$$

③ は常に成り立つ．

①，④ より，$c=0$

② より，$a=d$

よって，求める条件は，$\boldsymbol{a=d}$**，**$\boldsymbol{c=0}$

138（1）　$A=\begin{pmatrix}5&3&1\\7&5&3\\8&2&6\end{pmatrix}$ とおくと，${}^tA=\begin{pmatrix}5&7&8\\3&5&2\\1&3&6\end{pmatrix}$

ここで，$X=\dfrac{1}{2}(A+{}^tA)$ とすれば

$$X=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}5&3&1\\7&5&3\\8&2&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&7&8\\3&5&2\\1&3&6\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}10&10&9\\10&10&5\\9&5&12\end{pmatrix}$$

また，$Y=\dfrac{1}{2}(A-{}^tA)$ とすれば

$$X=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}5&3&1\\7&5&3\\8&2&6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5&7&8\\3&5&2\\1&3&6\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-4&-7\\4&0&1\\7&-1&0\end{pmatrix}$$

よって

$$A=X+Y=\boldsymbol{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}10&10&9\\10&10&5\\9&5&12\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-4&-7\\4&0&1\\7&-1&0\end{pmatrix}}$$

（2）　$A=\begin{pmatrix}3&4&8\\6&5&4\\10&2&7\end{pmatrix}$ とおくと，${}^tA=\begin{pmatrix}3&6&10\\4&5&2\\8&4&7\end{pmatrix}$

ここで，$X=\dfrac{1}{2}(A+{}^tA)$ とすれば

$$X=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}3&4&8\\6&5&4\\10&2&7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&6&10\\4&5&2\\8&4&7\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6&10&18\\10&10&6\\18&6&14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&5&9\\5&5&3\\9&3&7\end{pmatrix}$$

また，$Y=\dfrac{1}{2}(A-{}^tA)$ とすれば

$$X=\frac{1}{2}\left\{\begin{pmatrix}3&4&8\\6&5&4\\10&2&7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&6&10\\4&5&2\\8&4&7\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-2&-2\\2&0&2\\2&-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$$

よって

$$A=X+Y=\boldsymbol{\begin{pmatrix}3&5&9\\5&5&3\\9&3&7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-1&-1\\1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}}$$

139（1）

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

（2）

$$(A+E)(A^2-A+E)$$

$$= AA^2 - AA + AE - EA^2 - EA + E^2$$

$$= A^3 - A^2 + A - A^2 - A + E$$

$$= A^3 + E$$

$$= O + E \qquad \longleftarrow \text{（1）より}$$

$$= E$$

また，$(A^2-A+E)(A+E)$

$$= A^2A + A^2E - AA - AE + EA + E^2$$

$$= A^3 + A^2 - A^2 - A + A + E$$

$$= A^3 + E$$

$$= O + E \qquad \longleftarrow \text{（1）より}$$

$$= E$$

よって，$(A+E)(A^2-A+E) = (A^2-A+E)(A+E) = E$ であるから，$A+E$ の逆行列は，A^2-A+E である．

140（1）

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 2+2 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 4+2 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

よって，$\boldsymbol{A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix}}$ と推定できる．

（2）　$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix} \quad \cdots$① とする．

［1］$n=1$ のとき

$$A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\cdot 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

よって，$n=1$ のとき，①は成り立つ．

［2］$n=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2k & 1 \end{pmatrix}$$

両辺に右から A をかけると

$$A^kA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2k & 1 \end{pmatrix}A$$

これより，$A^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2k & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 2k+2 & 0+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2(k+1) & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$n=k+1$ のときも，①は成り立つ．

［1］，［2］から，①はすべての自然数 n について成り立つ．

∎