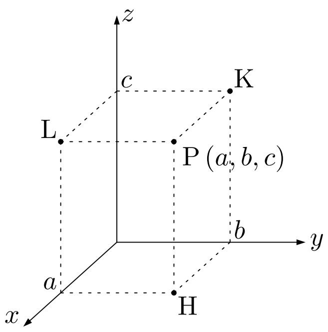
1章　ベクトル

§2　空間のベクトル　(p.26〜p.43)

問1

それぞれの成分に移動量を加えればよいので，点 Q の座標は
$(\boldsymbol{x+a,\ y+b,\ z+c})$

問2



図より，$\mathbf{H}\,(\boldsymbol{a,\ b,\ 0})$，　$\mathbf{K}\,(\boldsymbol{0,\ b,\ c})$，　$\mathbf{L}\,(\boldsymbol{a,\ 0,\ c})$

問3

$$\sqrt{(-1-2)^2+\{5-(-3)\}^2+(-2-1)^2}$$
$$=\sqrt{(-3)^2+8^2+(-3)^2}$$
$$=\sqrt{9+64+9}=\boldsymbol{\sqrt{82}}$$

問4

$\sqrt{(4-1)^2+(y-2)^2+\{-7-(-5)\}^2}=5$ であるから
$3^2+(y-2)^2+(-2)^2=25$

これを解くと

$$9+(y^2-4y+4)+4-25=0$$
$$y^2-4y-8=0$$
$$y=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot(-8)}}{1}$$
$$=2\pm\sqrt{12}$$
$$=\boldsymbol{2\pm2\sqrt{3}}$$

問5

（1）　与式 $=(1,\ 2,\ -1)+(-1,\ 2,\ -3)$
$$=(1+(-1),\ 2+2,\ -1+(-3))$$
$$=\boldsymbol{(0,\ 4,\ -4)}$$
$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{0^2+4^2+(-4)^2}$$
$$=\sqrt{16+16}$$
$$=\sqrt{32}=\boldsymbol{4\sqrt{2}}$$

（2）　与式 $=3(1,\ 2,\ -1)+2(-1,\ 2,\ -3)$
$$=(3,\ 6,\ -3)+(-2,\ 4,\ -6)$$
$$=(3+(-2),\ 6+4,\ -3+(-6))$$
$$=\boldsymbol{(1,\ 10,\ -9)}$$
$$\left|3\vec{a}+2\vec{b}\right|=\sqrt{1^2+10^2+(-9)^2}$$
$$=\sqrt{1+100+81}$$
$$=\boldsymbol{\sqrt{182}}$$

問6

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 0,\ 2)-(5,\ 3,\ 1)$$
$$=(-1-5,\ 0-3,\ 2-1)=\boldsymbol{(-6,\ -3,\ 1)}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(3,\ 1,\ -1)-(-3,\ -2,\ 0)$$
$$=(3-(-3),\ 1-(-2),\ -1-0)=\boldsymbol{(6,\ 3,\ -1)}$$

この結果より，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

また，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right|$

以上より，AB // CD，AB = CD であるから，四角形 ABCD は**平行四辺形**である．

問7

（1）　求める座標は
$$\left(\frac{3\cdot3+5\cdot4}{5+3},\ \frac{3\cdot1+5\cdot(-2)}{5+3},\ \frac{3\cdot2+5\cdot5}{5+3}\right)$$
$$=\left(\frac{9+20}{8},\ \frac{3-10}{8},\ \frac{6+25}{8}\right)$$
$$=\boldsymbol{\left(\frac{29}{8},\ -\frac{7}{8},\ \frac{31}{8}\right)}$$

（2）　求める座標は
$$\left(\frac{5\cdot3+3\cdot4}{3+5},\ \frac{5\cdot1+3\cdot(-2)}{3+5},\ \frac{5\cdot2+3\cdot5}{3+5}\right)$$
$$=\left(\frac{15+12}{8},\ \frac{5-6}{8},\ \frac{10+15}{8}\right)$$
$$=\boldsymbol{\left(\frac{27}{8},\ -\frac{1}{8},\ \frac{25}{8}\right)}$$

問8

（1）　G の位置ベクトルを $\vec{g}$ とすると
$$\vec{g}=\boldsymbol{\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}}$$

（2）　点 P の位置ベクトルは
$$\frac{1\vec{d}+3\vec{g}}{3+1}=\frac{\vec{d}+3\cdot\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}}{4}$$
$$=\boldsymbol{\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}}$$

問9

（1）　$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot(-2)+1\cdot3+2\cdot1$
$$=-6+3+2=\boldsymbol{-1}$$

（2）　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-4\cdot(-1)+5\cdot2+9\cdot(-3)$
$$=4+10-18=\boldsymbol{-4}$$

問10　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする．

（1）
$$\cos\theta=\frac{2\cdot3+1\cdot(-2)+3\cdot1}{\sqrt{2^2+1^2+3^2}\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}}$$
$$=\frac{6-2+3}{\sqrt{4+1+9}\sqrt{9+4+1}}$$
$$=\frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{14}}$$
$$=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より，$\theta=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}}$

（2）　$\cos\theta = \dfrac{5\cdot(-1)+6\cdot 2+7\cdot(-1)}{\sqrt{5^2+6^2+7^2}\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}}$

$= \dfrac{-5+12-7}{\sqrt{25+36+49}\sqrt{1+4+1}}$

$= \dfrac{0}{\sqrt{110}\sqrt{6}} = 0$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より，$\theta = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{2}}$

問 11

（1）　$\vec{a}\perp\vec{b}$ より，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ であるから

$3\cdot(-1)+2\cdot 4+1\cdot k=0$

これを解くと

$-3+8+k=0$

$\boldsymbol{k=-5}$

（2）　求める単位ベクトルを $\vec{c}=(x,\ y,\ z)$ とする．

また，（1）より，$\vec{b}=(-1,\ 4,\ -5)$

$|\vec{c}|=1$ より，$x^2+y^2+z^2=1\quad\cdots①$

$\vec{a}\perp\vec{c}$ より，$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ であるから，$3x+2y+z=0\quad\cdots②$

$\vec{b}\perp\vec{c}$ より，$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$ であるから，$-x+4y-5z=0\quad\cdots③$

② + ③ × 3 より，$14y-14z=0$，すなわち，$y=z$

これを，② に代入して

$3x+2z+z=0$

$3x=-3z$，すなわち，$x=-z$

これらを ① に代入して

$(-z)^2+z^2+z^2=1$

$3z^2=1$

$z^2=\dfrac{1}{3}$

$z=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって，求める単位ベクトルは，$\boldsymbol{\left(\mp\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)}$

（複号同順）

問 12

（1）　正四面体の各面は正三角形だから

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\angle\mathrm{AOB}$

$= r\cdot r\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}$

$= r^2\cdot\dfrac{1}{2} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}r^2}$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\angle\mathrm{AOC}$

$= r\cdot r\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}$

$= r^2\cdot\dfrac{1}{2} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}r^2}$

（2）　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})$

$= \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$= \dfrac{1}{2}r^2 - \dfrac{1}{2}r^2 = 0$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ である．

問 13　t は実数

（1）　直線上の点の座標を $(x,\ y,\ z)$ とすると

$(x,\ y,\ z) = (1,\ 3,\ 4)+t(-3,\ 1,\ 2)$

$= (1-3t,\ 3+t,\ 4+2t)$

よって

$$\begin{cases} \boldsymbol{x=1-3t} \\ \boldsymbol{y=3+t} \\ \boldsymbol{z=4+2t} \end{cases}$$

または，t を消去して

$$\boldsymbol{\frac{x-1}{-3} = y-3 = \frac{z-4}{2}}$$

（2）　直線上の点の座標を $(x,\ y,\ z)$ とし，$(4,\ 2,\ 5)-(2,\ -3,\ 1)=(2,\ 5,\ 4)$ を方向ベクトル，通る点を $(2,\ -3,\ 1)$ とすると

$(x,\ y,\ z) = (2,\ -3,\ 1)+t(2,\ 5,\ 4)$

$= (2+2t,\ -3+5t,\ 1+4t)$

よって

$$\begin{cases} \boldsymbol{x=2+2t} \\ \boldsymbol{y=-3+5t} \\ \boldsymbol{z=1+4t} \end{cases}$$

または，t を消去して

$$\boldsymbol{\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-1}{4}}$$

問 14

直線 $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{-2\sqrt{2}}$ の方向ベクトルを $\vec{v_1}$ とすると

$\vec{v_1}=(2,\ 2,\ -2\sqrt{2})$

直線 $\dfrac{x+3}{-1}=y+2=\dfrac{z-1}{\sqrt{2}}$ の方向ベクトルを $\vec{v_2}$ とすると

$\vec{v_2}=(-1,\ 1,\ \sqrt{2})$

$\vec{v_1}$ と $\vec{v_2}$ のなす角を θ とすれば

$\cos\theta = \dfrac{2\cdot(-1)+2\cdot 1+(-2\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2^2+2^2+(-2\sqrt{2})^2}\sqrt{(-1)^2+1^2+(\sqrt{2})^2}}$

$= \dfrac{-2+2-4}{\sqrt{4+4+8}\sqrt{1+1+2}}$

$= \dfrac{-4}{4\cdot 2} = -\dfrac{1}{2}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$\theta=120^\circ$

したがって，2 直線のなす角は，$180^\circ-120^\circ=\boldsymbol{60^\circ}$

問 15

直線 ℓ_1 の方向ベクトルを $\vec{v_1}$ とすると

$\vec{v_1}=(4,\ -5,\ 3)$

直線 ℓ_2 の方向ベクトルを $\vec{v_2}$ とすると

$\vec{v_2}=(k,\ 2,\ -2)$

$\vec{v_1}$ と $\vec{v_2}$ が直交すればよいので，$\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}=0$ となればよい．

$\vec{v_1}\cdot\vec{v_2} = 4\cdot k+(-5)\cdot 2+3\cdot(-2)$

$= 4k-10-6$

$= 4k-16=0$

これより，$\boldsymbol{k=4}$

問 16

（1）　平面上の点の座標を $(x,\ y,\ z)$，点 $(4,\ 1,\ -3)$ を A，$\vec{n}=(1,\ -2,\ 2)$ とする．

$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ であるから，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x,\ y,\ z)-(4,\ 1,\ -3)=(x-4,\ y-1,\ z+3)$ なので

$1(x-4)-2(y-1)+2(z+3)=0$

$x-4-2y+2+2z+6=0$

よって，$\boldsymbol{x-2y+2z+4=0}$

（2） 平面 $2x-y+3z=1$ の法線ベクトルの 1 つは，$(2,\ -1,\ 3)$ であり，求める平面もこれを法線ベクトルとするので，平面上の点の座標を $(x,\ y,\ z)$，点 $(3,\ 1,\ -1)$ を A，$\vec{n}=(2,\ -1,\ 3)$ とすると，$\vec{n}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ であるから，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x,\ y,\ z)-(3,\ 1,\ -1)=(x-3,\ y-1,\ z+1)$ なので

$2(x-3)-1(y-1)+3(z+1)=0$

$2x-6-y+1+3z+3=0$

よって，$\boldsymbol{2x-y+3z-2=0}$

（3） 求める平面の方程式を $ax+by+cz+d=0$ とおく．

与えられた 3 点を通ることから

$$\begin{cases} b+2c+d=0 & \cdots① \\ 3a-c+d=0 & \cdots② \\ 4a+b+d=0 & \cdots③ \end{cases}$$

①＋②×2 より，$6a+b+3d=0\ \ \cdots④$

④−③ より，$2a+2d=0$

これより，$a=-d\ \ \cdots⑤$

⑤ を ③ に代入して，$-4d+b+d=0$

これより，$b=3d\ \ \cdots⑥$

⑥ を ① に代入して，$3d+2c+d=0$

これより，$c=-2d\ \ \cdots⑦$

⑤，⑥，⑦ より，求める方程式は

$-dx+3dy-2dz+d=0\ \ \cdots⑧$ となる．

ここで，$d=0$ とすると，$a=b=c=0$ となるから，$d\fallingdotseq 0$ である．

⑧ の両辺を $-d$ で割って

$\boldsymbol{x-3y+2z-1=0}$

問 17

平面 $2x+y+3z-6=0$ の法線ベクトルの 1 つは，$(2,\ 1,\ 3)$

平面 $3x-2y+z-5=0$ の法線ベクトルの 1 つは，$(3,\ -2,\ 1)$

これら 2 つの法線ベクトルのなす角を θ とすると

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{2\cdot 3+1\cdot(-2)+3\cdot 1}{\sqrt{2^2+1^2+3^2}\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}} \\ &= \frac{6-2+3}{\sqrt{4+1+9}\sqrt{9+4+1}} \\ &= \frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{14}} \\ &= \frac{7}{14}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

よって，$\theta=60^\circ$ より，2 平面のなす角は $\boldsymbol{60^\circ}$

問 18

平面 $2x+y+kz-4=0$ の法線ベクトルの 1 つは，$(2,\ 1,\ k)$

平面 $2x+(k+2)y-3z-7=0$ の法線ベクトルの 1 つは，$(2,\ k+2,\ -3)$

2 平面が垂直のとき，これら 2 つの法線ベクトルも垂直となるので，内積が 0 となる．

よって，$2\cdot 2+1(k+2)+k\cdot(-3)=0$

これを解いて

$4+k+2-3k=0$

$-2k=-6$

したがって，$\boldsymbol{k=3}$

問 19

（1）
$$\begin{aligned}&\frac{|2\cdot 0+0-3\cdot 0+5|}{\sqrt{2^2+1^2+(-3)^2}} \\ &= \frac{|5|}{\sqrt{4+1+9}} \\ &= \boldsymbol{\frac{5}{\sqrt{14}}}\end{aligned}$$

（2）
$$\begin{aligned}&\frac{|2\cdot(-1)+2-3\cdot 1+5|}{\sqrt{2^2+1^2+(-3)^2}} \\ &= \frac{|-2+2-3+5|}{\sqrt{4+1+9}} \\ &= \frac{|2|}{\sqrt{14}}=\boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{14}}}\end{aligned}$$

（3）
$$\begin{aligned}&\frac{|2\cdot(-4)-9-3\cdot 1+5|}{\sqrt{2^2+1^2+(-3)^2}} \\ &= \frac{|-8-9-3+5|}{\sqrt{4+1+9}} \\ &= \frac{|-15|}{\sqrt{14}}=\boldsymbol{\frac{15}{\sqrt{14}}}\end{aligned}$$

問 20

（1） $(x-0)^2+(y-0)^2+(z-5)^2=(\sqrt{3})^2$

よって，$\boldsymbol{x^2+y^2+(z-5)^2=3}$

（2） $\{x-(-1)\}^2+(y-2)^2+\{z-(-3)\}^2=2^2$

よって，$\boldsymbol{(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=4}$

問 21

（1） 半径を r とすると，求める球の方程式は，$x^2+y^2+z^2=r^2$ と表すことができる．

この球が点 $(2,\ -3,\ -1)$ を通るので

$2^2+(-3)^2+(-1)^2=r^2$

$4+9+1=r^2$

よって，$r^2=14$

したがって，$\boldsymbol{x^2+y^2+z^2=14}$

（2） 半径を r とすると，求める球の方程式は，$(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=r^2$ と表すことができる．

この球が点 $(-1,\ 5,\ -3)$ を通るので

$(-1-1)^2+(5-3)^2+(-3+2)^2=r^2$

$4+4+1=r^2$

よって，$r^2=9$

したがって，$\boldsymbol{(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=9}$

（3） 中心の座標は，与えられた 2 点の中点だから

$$\left(\frac{1+3}{2},\ \frac{3+0}{2},\ \frac{-5+1}{2}\right)=\left(2,\ \frac{3}{2},\ -2\right)$$

また，半径は，与えられた 2 点を結ぶ線分の長さの $\frac{1}{2}$ だから

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\sqrt{(3-1)^2+(0-3)^2+(1+5)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{4+9+36} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{49}=\frac{7}{2}\end{aligned}$$

よって，$(x-2)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+\{z-(-2)\}^2=\left(\frac{7}{2}\right)^2$

すなわち，$\boldsymbol{(x-2)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+(z+2)^2=\frac{49}{4}}$

問 22

（1） $x^2-6x+y^2+2y+z^2-4z-2=0$
$(x-3)^2-9+(y+1)^2-1+(z-2)^2-4-2=0$
$(x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=16$
$(x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=4^2$
よって，中心は，$\mathbf{(3,\ -1,\ 2)}$，半径は，$\mathbf{4}$

（2） $x^2+2x+y^2-4y+z^2-1=0$
$(x+1)^2-1+(y-2)^2-4+z^2-1=0$
$(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=6$
$(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=(\sqrt{6})^2$
よって，中心は，$\mathbf{(-1,\ 2,\ 0)}$，半径は，$\boldsymbol{\sqrt{6}}$

（3） 両辺を 2 倍して
$x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z=0$
$x^2-2x+y^2-2y+z^2-2z=0$
$(x-1)^2-1+(y-1)^2-1+(z-1)^2-1=0$
$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=3$
$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=(\sqrt{3})^2$
よって，中心は，$\mathbf{(1,\ 1,\ 1)}$，半径は，$\boldsymbol{\sqrt{3}}$

問 23

交点 Q は直線 AG 上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ と表すことができるので

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t(\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\\&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{4}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\\&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\left(-\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)\\&=\left(1-\frac{3t}{4}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{t}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{t}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\quad\cdots①\end{aligned}$$

一方, 点 Q は平面 OBC 上にあるので, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=l\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+m\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}\quad\cdots②$ と表すことができる.

①, ② より

$$\left(1-\frac{3t}{4}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{t}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{t}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=l\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+m\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は線形独立なので

$$\begin{cases}1-\dfrac{3t}{4}=0 & \cdots③\\ \dfrac{t}{4}=l & \cdots④\\ \dfrac{t}{4}=m & \cdots⑤\end{cases}$$

③ より，$\frac{3t}{4}=1$ であるから，$t=\frac{4}{3}$

これを，④, ⑤ に代入して

$$l=m=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{3}$$

したがって，② より

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\boldsymbol{\frac{1}{3}}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

■