1章　ベクトル

問 1

正方形の性質より，$\mathrm{AB}=\mathrm{AD}=\mathrm{DC}=\sqrt{2}$

三平方の定理より

$\mathrm{AC}=\mathrm{AB}\times\sqrt{2}=2$

また，$\mathrm{OA}=\mathrm{OC}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AC}=1$

以上より

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{DC}}\right|=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=\mathbf{2}$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|=\mathbf{1}$

大きさと向きが同じベクトルが等しいベクトルであるから

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$

大きさが 1 のベクトルが単位ベクトルであるから

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CO}}$

問 2

大きさが同じで向きが反対であるものが，互いに逆ベクトルとなるので

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

問 3

（1）　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$

$\qquad=\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}$

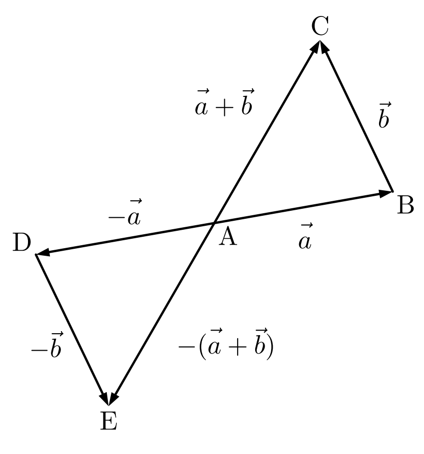
（2）　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$

$\qquad=-\vec{c}+(-\vec{a})+\vec{b}+\vec{d}$

$\qquad=\boldsymbol{-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}}$

問 4

$m=-1$ であるから，証明すべき式は，$-(\vec{a}+\vec{b})=-\vec{a}-\vec{b}$ である．



線分 AB の延長上に点 D をとり，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となるようにする．

点 D を通り，直線 BC に平行な直線と直線 AC との交点を E とすると，$\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{ADE}$ は合同だから，$\mathrm{DE}=\mathrm{BC}$，$\mathrm{AE}=\mathrm{AC}$ であり，ベクトルの向きを考えると

$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=-\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=-\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

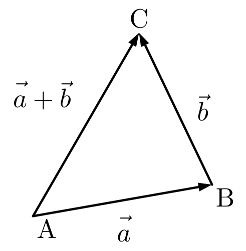
ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ より

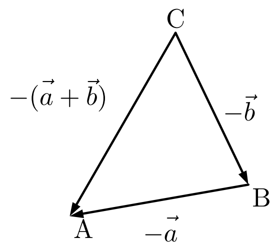
$-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(-\overrightarrow{\mathrm{BC}})=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

すなわち，$-(\vec{a}+\vec{b})=-\vec{a}-\vec{b}$ である．

〔別解〕

左側の図のように $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから，右側の図のように $\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ である．





ここで，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=-\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=-\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=-(\vec{a}+\vec{b})$ であるから

$-\vec{b}+(-\vec{a})=-(\vec{a}+\vec{b})$

すなわち，$-(\vec{a}+\vec{b})=-\vec{a}-\vec{b}$ である．

問 5

（1）　与式 $=2\vec{a}-6\vec{b}-3\vec{a}+3\vec{b}$

$\qquad=\boldsymbol{-\vec{a}-3\vec{b}}$

（2）　与式 $=\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}-2\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c}$

$\qquad=\boldsymbol{-\vec{a}+\vec{c}}$

問 6

$$
\begin{aligned}
3\vec{a}-\vec{b}-\vec{x}&=2\vec{x}-3\vec{a}+2\vec{b}\\
-\vec{x}-2\vec{x}&=-3\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{a}+\vec{b}\\
-3\vec{x}&=-6\vec{a}+3\vec{b}\\
\vec{x}&=-\frac{1}{3}(-6\vec{a}+3\vec{b})\\
&=\boldsymbol{2\vec{a}-\vec{b}}
\end{aligned}
$$

問 7

$\dfrac{1}{|\vec{a}|}>0$ であるから，与えられたベクトルは，$\vec{a}$ と同じ同じ向きであり，その大きさは

$$
\left|\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}\right|=\left|\frac{1}{|\vec{a}|}\right||\vec{a}|
=\frac{1}{|\vec{a}|}|\vec{a}|=1
$$

よって，これは単位ベクトルである．

したがって，$\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ は，$\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルとなる．

問 8

（1）　与式 $=3(-1,\ 2)-2(3,\ -1)$

$\qquad=(-3,\ 6)-(6,\ -2)$

$\qquad=(-3-6,\ 6-(-2))=(-9,\ 8)$

よって

$\left|3\vec{c}-2\vec{d}\right|=\sqrt{(-9)^2+8^2}$

$\qquad=\sqrt{81+64}=\boldsymbol{\sqrt{145}}$

（2）　$$与式 = (-1,\ 2) + \frac{1}{2}(3,\ -1) = (-1,\ 2) + \left(\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right) = \left(-1+\frac{3}{2},\ 2-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$$

よって

$$\left|\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{10}}{2}}$$

（3）　$$与式 = -\frac{1}{3}(-1,\ 2) + \frac{1}{2}(3,\ -1) = \left(\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2},\ -\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{11}{6},\ -\frac{7}{6}\right)$$

よって

$$\left|\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}\right| = \sqrt{\left(\frac{11}{6}\right)^2+\left(-\frac{7}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{121}{36}+\frac{49}{36}} = \sqrt{\frac{170}{36}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{170}}{6}}$$

問 9

（1）　$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (3,\ 5)-(4,\ 0) = (3-4,\ 5-0) = (-1,\ 5)$$

よって

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{(-1)^2+5^2} = \sqrt{1+25} = \boldsymbol{\sqrt{26}}$$

（2）　$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = (-1,\ 3)-(3,\ 5) = (-1-3,\ 3-5) = (-4,\ -2)$$

よって

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right| = \sqrt{(-4)^2+(-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = \boldsymbol{2\sqrt{5}}$$

（3）　$$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = (4,\ 0)-(-1,\ 3) = (4+1,\ 0-3) = (5,\ -3)$$

よって

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right| = \sqrt{5^2+(-3)^2} = \sqrt{25+9} = \boldsymbol{\sqrt{34}}$$

問 10

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (3,\ 2)-(1,\ 1) = (3-1,\ 2-1) = (2,\ 1)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (x,\ y)-(1,\ 1) = (x-1,\ y-1)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より

$$(x-1,\ y-1) = k(2,\ 1) = (2k,\ k)$$

これより，$\begin{cases} x-1=2k & \cdots① \\ y-1=k & \cdots② \end{cases}$

また，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = 5$ より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 = 25$

すなわち，$(x-1)^2+(y-1)^2 = 25 \quad \cdots③$

①, ② を ③ に代入して

$$(2k)^2+k^2 = 25$$
$$5k^2 = 25$$
$$k^2 = 5$$

k は正の実数なので，$\boldsymbol{k=\sqrt{5}}$

これを，①, ② に代入して

$$x = 1+2\sqrt{5}$$
$$y = 1+\sqrt{5}$$

よって，点 C の座標は，$\boldsymbol{(1+2\sqrt{5},\ 1+\sqrt{5})}$

問 11

（1）　$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot3\cdot\cos\frac{2}{3}\pi = 2\cdot3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{-3}$$

（2）　$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot\sqrt{3}\cdot\cos\frac{\pi}{2} = 1\cdot\sqrt{3}\cdot0 = \boldsymbol{0}$$

問 12

$\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = 1$，$\vec{i}$ と $\vec{i}$，$\vec{j}$ と $\vec{j}$ のなす角は 0 であり，$\vec{i}$ と $\vec{j}$ のなす角は $\frac{\pi}{2}$ であるから

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = 1\cdot1\cdot\cos0 = 1\cdot1\cdot1 = 1$$

$$\vec{j}\cdot\vec{j} = 1\cdot1\cdot\cos0 = 1\cdot1\cdot1 = 1$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = 1\cdot1\cdot\cos\frac{\pi}{2} = 1\cdot1\cdot0 = 0$$

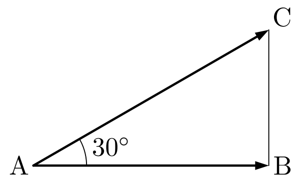
$$\vec{j}\cdot\vec{i} = 1\cdot1\cdot\cos\frac{\pi}{2} = 1\cdot1\cdot0 = 0$$

よって，$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = 1, \quad \vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{i} = 0$

問 13

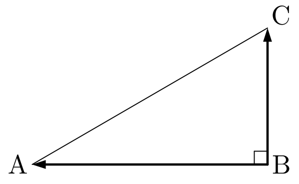
$\mathrm{AB} = \sqrt{3},\quad \mathrm{AC} = 2$

（1）　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角は 30° である．



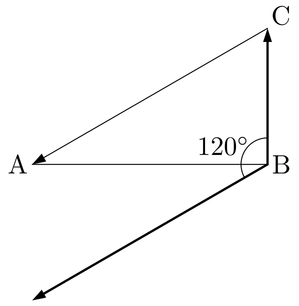
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \sqrt{3}\cdot2\cdot\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}\cdot2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{3}$$

（2）　$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ のなす角は 90° である．



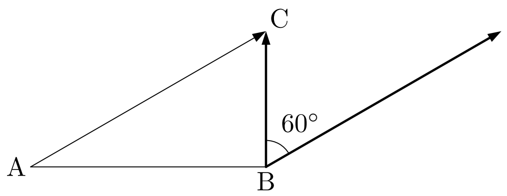
$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\sqrt{3}\cdot 1\cdot\cos\frac{\pi}{2}$$
$$=\sqrt{3}\cdot 1\cdot 0=\mathbf{0}$$

（3）　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ のなす角は 120° である．



$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=1\cdot 2\cdot\cos\frac{2}{3}\pi$$
$$=1\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\mathbf{-1}$$

（4）　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角は 60° である．



$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=1\cdot 2\cdot\cos\frac{\pi}{3}$$
$$=1\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{1}$$

問 14

（1）　$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot 3+(-4)\cdot 1$
$$=6-4=\mathbf{2}$$

（2）　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+1\cdot(-3)$
$$=3-3=\mathbf{0}$$

問 15

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする．

（1）　$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2}$
$$=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$
$$|\vec{b}|=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2}$$
$$=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot(-3)+2\cdot(-1)$$
$$=-3-2=-5$$

したがって

$$\cos\theta=\frac{-5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}$$
$$=-\frac{5}{5\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より，$\boldsymbol{\theta=\frac{3}{4}\pi}$

（2）　$|\vec{a}|=\sqrt{(-2)^2+1^2}$
$$=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$$
$$|\vec{b}|=\sqrt{6^2+(-3)^2}$$
$$=\sqrt{36+9}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2\cdot 6+1\cdot(-3)$$
$$=-12+3=-15$$

したがって

$$\cos\theta=\frac{-15}{\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{5}}$$
$$=-\frac{15}{15}=-1$$

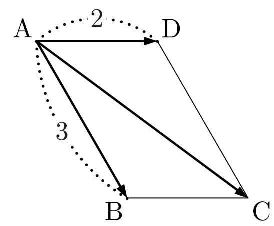
$0\leqq\theta\leqq\pi$ より，$\boldsymbol{\theta=\pi}$

問 16

（1）　与式 $=\vec{a}\cdot 2\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{b}\cdot 2\vec{a}-3\vec{b}\cdot\vec{b}$
$$=2|\vec{a}|^2-5\vec{a}\cdot\vec{b}-3|\vec{b}|^2$$
$$=2\cdot(\sqrt{2})^2-5\cdot(-1)-3\cdot 2^2$$
$$=4+5-12=\mathbf{-3}$$

（2）　与式 $=(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$
$$=2\vec{a}\cdot 2\vec{a}-2\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot 2\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}$$
$$=4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$
$$=4\cdot(\sqrt{2})^2-4\cdot(-1)+2^2$$
$$=8+4+4=\mathbf{16}$$

問 17



$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=3,\ |\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=2$
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=3\cdot 2\cdot\cos\frac{\pi}{3}$$
$$=3\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{3}$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2$$
$$=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2$$
$$=3^2+2\cdot 3+2^2$$
$$=9+6+4=19$$

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|>0$ であるから，$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{19}}$

問 18

ベクトルの平行条件より，$\vec{b}=m\vec{a}$ となる実数 m が存在するから

$$(1,\ k)=m(-2,\ k+3)$$

これより，$\begin{cases}1=-2m & \cdots①\\ k=m(k+3) & \cdots②\end{cases}$

① より，$m=-\dfrac{1}{2}$

これを ② に代入して

$k = -\dfrac{1}{2}(k+3)$
$2k = -k-3$
$3k = -3$
よって，$\boldsymbol{k = -1}$

問 19

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (5,\ 4) - (3,\ 1)$
$= (2,\ 3)$
$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = (k,\ 3) - (1,\ k)$
$= (k-1,\ 3-k)$

ベクトルの平行条件より，$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = m\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる実数 m が存在するから

$(k-1,\ 3-k) = m(2,\ 3)$

これより，$\begin{cases} k-1 = 2m & \cdots ① \\ 3-k = 3m & \cdots ② \end{cases}$

$① \times 3 - ② \times 2$ より
$3(k-1) - 2(3-k) = 0$
$3k - 3 - 6 + 2k = 0$
$5k = 9$
よって，$\boldsymbol{k = \dfrac{9}{5}}$

問 20

$$\left|2\vec{a} - \vec{b}\right|^2 = 4\left|\vec{a}\right|^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{b} + \left|\vec{b}\right|^2$$
$$= 4\cdot(\sqrt{6})^2 - 4\cdot(-2) + (\sqrt{3})^2$$
$$= 24 + 8 + 3 = 35 \fallingdotseq 0$$
$$\left|\vec{a} + 2\vec{b}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + 4\vec{a}\cdot\vec{b} + 4\left|\vec{b}\right|^2$$
$$= (\sqrt{6})^2 + 4\cdot(-2) + 4\cdot(\sqrt{3})^2$$
$$= 6 - 8 + 12 = 10 \fallingdotseq 0$$

よって，$\vec{a} \fallingdotseq \vec{0}$, $\vec{b} \fallingdotseq \vec{0}$
$2\vec{a} - \vec{b}$ と $\vec{a} + 2\vec{b}$ の内積を求めると

$$(2\vec{a} - \vec{b})\cdot(\vec{a} + 2\vec{b}) = 2\left|\vec{a}\right|^2 + 4\vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{a} - 2\left|\vec{b}\right|^2$$
$$= 2\left|\vec{a}\right|^2 + 3\vec{a}\cdot\vec{b} - 2\left|\vec{b}\right|^2$$
$$= 2\cdot(\sqrt{6})^2 + 3\cdot(-2) - 2\cdot(\sqrt{3})^2$$
$$= 12 - 6 - 6 = 0$$

よって，$2\vec{a} - \vec{b}$ と $\vec{a} + 2\vec{b}$ は直交する．

問 21

ベクトルの垂直条件より，$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ であるから
$-(7+k) + 3\cdot 5k = 0$
$-7 - k + 15k = 0$
$14k = 7$
$k = \dfrac{1}{2}$
このとき，$\vec{b} = \left(\dfrac{15}{2},\ \dfrac{5}{2}\right) \fallingdotseq \vec{0}$
よって，$\boldsymbol{k = \dfrac{1}{2}}$

問 22

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1,\ k) - (0,\ 0)$
$= (1,\ k)$
$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (1,\ k) - (8,\ 6)$
$= (-7,\ k-6)$
$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}} = 0$ であるから
$1\cdot(-7) + k(k-6) = 0$
$-7 + k^2 - 6k = 0$
$k^2 - 6k - 7 = 0$
$(k+1)(k-7) = 0$
よって，$\boldsymbol{k = -1,\ 7}$

問 23

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2+3} = \boldsymbol{\frac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{5}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{1\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3+1} = \boldsymbol{\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{4}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (-1,\ 2)$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (3,\ 4)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{5}$$
$$= \frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$= \frac{3}{5}(-1,\ 2) + \frac{2}{5}(3,\ 4)$$
$$= \left(-\frac{3}{5},\ \frac{6}{5}\right) + \left(\frac{6}{5},\ \frac{8}{5}\right)$$
$$= \left(-\frac{3}{5} + \frac{6}{5},\ \frac{6}{5} + \frac{8}{5}\right) = \left(\frac{3}{5},\ \frac{14}{5}\right)$$

よって，点 P の座標は，$\boldsymbol{\left(\dfrac{3}{5},\ \dfrac{14}{5}\right)}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{4}$$
$$= \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$= \frac{1}{4}(-1,\ 2) + \frac{3}{4}(3,\ 4)$$
$$= \left(-\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{9}{4},\ 3\right)$$
$$= \left(-\frac{1}{4} + \frac{9}{4},\ \frac{1}{2} + 3\right) = \left(2,\ \frac{7}{2}\right)$$

よって，点 Q の座標は，$\boldsymbol{\left(2,\ \dfrac{7}{2}\right)}$

問 24

$\triangle$ABC の重心は，中線 AL を $2:1$ に内分する点である．
点 L は，線分 BC の中点だから点 L の位置ベクトルは

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}$$

よって，重心 G の位置ベクトルは

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OL}}}{2+1}$$
$$= \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\times\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}}{3}$$
$$= \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}$ である．

問 25

（1） $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから，与えられた等式は
$\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}$
となる．
これより，$\vec{c} - \vec{b} = \vec{a} + \vec{b}$ であるから
$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{b}$

すなわち，$\vec{c}=\vec{a}+2\vec{b}$

（2）　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$=\vec{c}-\vec{a}$

$=(\vec{a}+2\vec{b})-\vec{a}=2\vec{b}$

よって，　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=2\vec{b}$

$=2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ である．

問 26

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$=(2,\ 3)-(4,\ 1)=\boldsymbol{(-2,\ 2)}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$=(1,\ 4)-(4,\ 1)=\boldsymbol{(-3,\ 3)}$

よって，　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2,\ 2)$

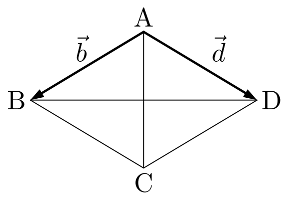
$=\dfrac{2}{3}(-3,\ 3)$

$=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であるから，3 点 A，B，C は一直線上にある．

問 27

下の図のように，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とする．



ひし形の定義より，$|\vec{b}|=|\vec{d}|\cdots$①

また，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

$=\vec{b}+\vec{d}$

$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

$=-\vec{b}+\vec{d}$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ の内積を求めると

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=(\vec{b}+\vec{d})\cdot(-\vec{b}+\vec{d})$

$=(\vec{d}+\vec{b})\cdot(\vec{d}-\vec{b})$

$=|\vec{d}|^2-|\vec{b}|^2$

ここで，① より，$|\vec{b}|^2=|\vec{d}|^2$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=0$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ すなわち，$\mathrm{AC}\perp\mathrm{BD}$ である．

問 28

（1）　直線上の任意の点の座標を $(x,\ y)$，t を実数とすると

$(x,\ y)=(3,\ 1)+t(2,\ 4)$

$=(3+2t,\ 1+4t)$

成分を比較して

$$\begin{cases}\boldsymbol{x=3+2t}\\ \boldsymbol{y=1+4t}\end{cases}$$

（2）　直線上の任意の点の座標を $(x,\ y)$，t を実数とすると

$(x,\ y)=(4,\ -1)+t(0,\ 4)$

$=(4,\ -1+4t)$

成分を比較して

$$\begin{cases}\boldsymbol{x=4}\\ \boldsymbol{y=-1+4t}\end{cases}$$

※ 任意の実数 t に対して，常に $x=4$ であるから，$y=-1+4t$ はなくてもよい．

（3）　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を方向ベクトルと考える．

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(6,\ 4)-(3,\ 5)=(3,\ -1)$

点 A を通り，$(3,\ -1)$ を方向ベクトルとする直線上の任意の点の座標を $(x,\ y)$，t を実数とすると

$(x,\ y)=(3,\ 5)+t(3,\ -1)$

$=(3+3t,\ 5-t)$

成分を比較して

$$\begin{cases}\boldsymbol{x=3+3t}\\ \boldsymbol{y=5-t}\end{cases}$$

※ この解答以外にも，点 B を通り，$(3,\ -1)$ を方向ベクトルとする直線を考えれば

$$\begin{cases}\boldsymbol{x=6+3t}\\ \boldsymbol{y=4-t}\end{cases}$$

点 A を通り，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(-3,\ 1)$ を方向ベクトルとすれば

$$\begin{cases}\boldsymbol{x=3-3t}\\ \boldsymbol{y=5+t}\end{cases}$$

点 B を通り，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(-3,\ 1)$ を方向ベクトルとすれば

$$\begin{cases}\boldsymbol{x=6-3t}\\ \boldsymbol{y=4+t}\end{cases}$$

問 29

（1）　$\boldsymbol{(3,\ 4)}$

（2）　$y=\dfrac{3}{5}x+2$ より，$5y=3x+10$，すなわち，$3x-5y+10=0$ であるから

$\boldsymbol{(3,\ -5)}$

問 30

（1）　$\dfrac{|2\cdot0+3\cdot0+7|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\dfrac{|7|}{\sqrt{13}}$

$=\boldsymbol{\dfrac{7}{\sqrt{13}}}$

（2）$y=3x+2$ より，$3x-y+2=0$ であるから

$\dfrac{|3\cdot(-2)-1+2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{|-5|}{\sqrt{10}}$

$=\boldsymbol{\dfrac{5}{\sqrt{10}}}$

問 31

（1）　点 A を通り，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,\ -1)-(-1,\ 2)=(4,\ -3)$ を方向ベクトルとする直線の式を求めればよい．

直線上の任意の点の座標を $(x,\ y)$，t を実数とすると

$(x,\ y)=(-1,\ 2)+t(4,\ -3)$

$=(-1+4t,\ 2-3t)$

成分を比較して

$$\begin{cases} x = -1 + 4t & \cdots ① \\ y = 2 - 3t & \cdots ② \end{cases}$$

① より，$t = \dfrac{x+1}{4}$

② より，$t = \dfrac{y-2}{-3}$

よって，$\dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y-2}{-3}$

$-3(x+1) = 4(y-2)$

$-3x - 3 = 4y - 8$

したがって，$\boldsymbol{3x + 4y - 5 = 0}$

〔別解〕

求める方程式は

$y - 2 = \dfrac{-1-2}{3-(-1)}\{x - (-1)\}$

$y - 2 = -\dfrac{3}{4}(x+1)$

$4(y-2) = -3(x+1)$

$4y - 8 = -3x - 3$

よって，$\boldsymbol{3x + 4y - 5 = 0}$

（2）点 C と直線 AB との距離を d とすると

$$d = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|10|}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = \boldsymbol{2}$$

（3）

$$\begin{aligned} \triangle \mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}\mathrm{AB} \cdot d \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\{3-(-1)\}^2 + (-1-2)^2} \cdot 2 \\ &= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = \boldsymbol{5} \end{aligned}$$

問 32

（1）　$\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ とおくと

$$\begin{aligned} (5,\ 14) &= m(0,\ -2) + n(-1,\ -3) \\ &= (-n,\ -2m - 3n) \end{aligned}$$

成分を比較して

$$\begin{cases} 5 = -n & \cdots ① \\ 14 = -2m - 3n & \cdots ② \end{cases}$$

① より，$n = -5$

これを ② に代入して

$-2m - 3 \cdot (-5) = 14$

$-2m + 15 = 14$

$-2m = -1$

$m = \dfrac{1}{2}$

よって，$\boldsymbol{\vec{c} = \dfrac{1}{2}\vec{a} - 5\vec{b}}$

（2）　$\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b}$ とおくと

$$\begin{aligned} (-3,\ 23) &= m(0,\ -2) + n(-1,\ -3) \\ &= (-n,\ -2m - 3n) \end{aligned}$$

成分を比較して

$$\begin{cases} -3 = -n & \cdots ① \\ 23 = -2m - 3n & \cdots ② \end{cases}$$

① より，$n = 3$

これを ② に代入して

$-2m - 3 \cdot 3 = 23$

$-2m - 9 = 23$

$-2m = 32$

$m = -16$

よって，$\boldsymbol{\vec{d} = -16\vec{a} + 3\vec{b}}$

問 33

（1）　$\vec{a}$，$\vec{b}$ が線形独立であるから

$$\begin{cases} 1 = 2y - 1 & \cdots ① \\ 2x = 6 & \cdots ② \end{cases}$$

① より，$y = 1$

② より，$x = 3$

よって，$\boldsymbol{x = 3,\ y = 1}$

（2）

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= 2x\vec{a} + x\vec{b} - y\vec{a} + \vec{b} \\ &= (2x - y)\vec{a} + (x+1)\vec{b} \end{aligned}$$

よって，$x\vec{a} + 2y\vec{b} = (2x - y)\vec{a} + (x+1)\vec{b}$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ が線形独立であるから

$$\begin{cases} x = 2x - y & \cdots ① \\ 2y = x + 1 & \cdots ② \end{cases}$$

① より，$x = y$

これを ② に代入して

$2x = x + 1$

$x = 1$

よって，$y = 1$

したがって，$\boldsymbol{x = 1,\ y = 1}$

問 34

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とする．

点 L は線分 AB を $2:3$ に内分する点なので

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OL}} &= \frac{3\vec{a} + 2\vec{b}}{3+2} \\ &= \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} \end{aligned}$$

点 P は線分 OL 上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OL}}$ となる実数 s が存在するから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OP}} &= s\left(\frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}\right) \\ &= \frac{3s}{5}\vec{a} + \frac{2s}{5}\vec{b} \quad \cdots ① \end{aligned}$$

また，点 P は線分 AM 上にあるので，実数 t を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ とおけば

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AM}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t(\overrightarrow{\mathrm{OM}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) \\ &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OM}} \end{aligned}$$

ここで，点 M は線分 OB の中点だから，$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \dfrac{1}{2}\vec{b}$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\vec{a} + \dfrac{t}{2}\vec{b} \quad \cdots ②$

①，② より

$$\frac{3s}{5}\vec{a} + \frac{2s}{5}\vec{b} = (1-t)\vec{a} + \frac{t}{2}\vec{b}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は線形独立なので

$$\begin{cases} \dfrac{3s}{5} = 1 - t \\ \dfrac{2s}{5} = \dfrac{1}{2}t \end{cases}$$

整理すると

$$\begin{cases} 3s + 5t = 5 & \cdots ① \\ 4s = 5t & \cdots ② \end{cases}$$

② を ① に代入して

$3s + 4s = 5$

$s = \dfrac{5}{7}$

これを ② に代入して

$4 \cdot \dfrac{5}{7} = 5t$

$5t = \dfrac{20}{7}$

$t = \dfrac{4}{7}$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \dfrac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ となるので

AP : PM = 4 : 3

■