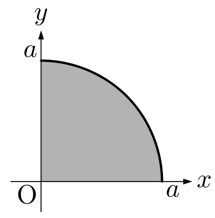
3章　重積分

練習問題 2-A

1. (1)　領域を図示すると



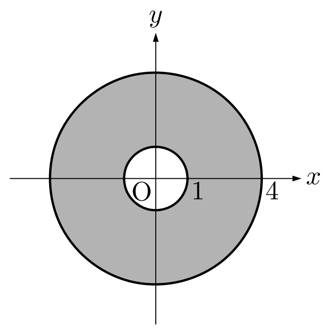
よって，領域 D は，次の不等式で表すことができる．

$0 \leqq r \leqq a,\quad 0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$

したがって

$$
\begin{aligned}
与式 &= \iint_D \sqrt{r^2}\cdot r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^a r^2\,dr \right\} d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{3}r^3 \right]_0^a d\theta \\
&= \frac{1}{3}a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\
&= \frac{1}{3}a^3 \Big[\ \theta\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{3}a^3 \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \boldsymbol{\frac{1}{6}\pi a^3}
\end{aligned}
$$

(2)　領域を図示すると



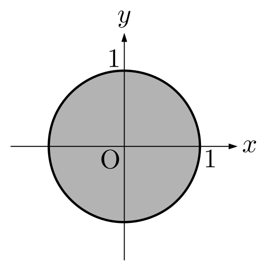
よって，領域 D は，次の不等式で表すことができる．

$1 \leqq r \leqq 2,\quad 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$

したがって

$$
\begin{aligned}
与式 &= \iint_D \frac{1}{r^2}\cdot r\,dr\,d\theta \\
&= \iint_D \frac{1}{r}\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_1^2 \frac{1}{r}\,dr \right\} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \Big[\log|r| \Big]_1^2 d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (\log 2 - 0) d\theta \\
&= \log 2 \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \log 2 \Big[\ \theta\ \Big]_0^{2\pi} \\
&= \log 2 \cdot 2\pi = \boldsymbol{2\pi \log 2}
\end{aligned}
$$

(3)　領域を図示すると



よって，領域 D は，次の不等式で表すことができる．

$0 \leqq r \leqq 1,\quad 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$

したがって

$$
\begin{aligned}
与式 &= \iint_D \frac{1}{1+r^2}\cdot r\,dr\,d\theta \\
&= \iint_D \frac{r}{1+r^2}\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^1 \frac{r}{1+r^2}\,dr \right\} d\theta
\end{aligned}
$$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{r}{1+r^2}\,dr$ において，$1+r^2 = t$ とおくと，$2r\,dr = dt$ より，$r\,dr = \dfrac{1}{2}\,dt$

また，r と t の対応は

r	$0 \to 1$
t	$1 \to 2$

よって

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{r}{1+r^2}\,dr &= \int_1^2 \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{t}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\Big[\log|r| \Big]_1^2 \\
&= \frac{1}{2}\log 2
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
与式 &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\log 2\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\log 2 \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \frac{1}{2}\log 2 \Big[\ \theta\ \Big]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{2}\log 2 \cdot 2\pi = \boldsymbol{\pi \log 2}
\end{aligned}
$$

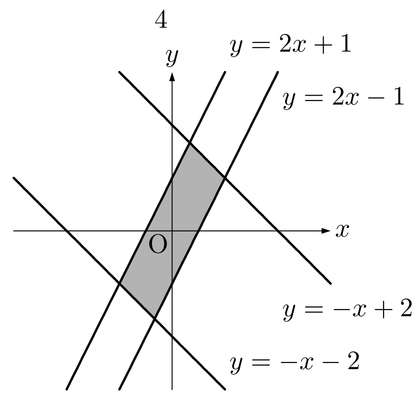
2. (1)　$|x+y| \leqq 2$ より，$-2 \leqq x+y \leqq 2$

すなわち，$-x-2 \leqq y \leqq -x+2$

$|2x-y| \leqq 1$ より，$-1 \leqq 2x-y \leqq 1$

すなわち，$-2x-1 \leqq -y \leqq -2x+1$ であるから，$2x-1 \leqq y \leqq 2x+1$

以上より，領域 D は図のようになる．



(2)　$x+y=u\cdots①$,　$2x-y=v\cdots②$ とする．

①＋② より，$3x=u+v$ であるから

$$x=\frac{u+v}{3}$$

よって，$\dfrac{\partial x}{\partial u}=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{\partial x}{\partial v}=\dfrac{1}{3}$

①×2－② より，$3y=2u-v$ であるから

$$y=\frac{2u-v}{3}$$

よって，$\dfrac{\partial y}{\partial u}=\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{\partial y}{\partial v}=-\dfrac{1}{3}$

また，$-2\leqq u\leqq 2$,　$-1\leqq v\leqq 1$,

$\dfrac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{vmatrix}=-\dfrac{1}{9}-\dfrac{2}{9}=-\dfrac{1}{3}$ であるから

$$\begin{aligned}
\text{与式}&=\iint_D u^2v^4\left|-\frac{1}{3}\right|du\,dv\\
&=\frac{1}{3}\iint_D u^2v^4\,du\,dv\\
&=\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\left\{\int_{-2}^{2}u^2v^4\,du\right\}dv\\
&=\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\left\{v^4\int_{-2}^{2}u^2\,du\right\}dv\\
&=\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\left\{2v^4\int_{0}^{2}u^2\,du\right\}dv\\
&=\frac{2}{3}\int_{-1}^{1}v^4\left[\frac{1}{3}u^3\right]_0^2dv\\
&=\frac{2}{3}\int_{-1}^{1}v^4\cdot\frac{8}{3}\,dv\\
&=\frac{16}{9}\cdot 2\int_0^1 v^4\,dv\\
&=\frac{32}{9}\left[\frac{1}{5}v^5\right]_0^1\\
&=\frac{32}{9}\cdot\frac{1}{5}=\boldsymbol{\frac{32}{45}}
\end{aligned}$$

3.　$z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$ について

$$\frac{\partial z}{\partial x}=x,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=y$$

よって，求める面積を S とすると

$$S=\iint_D\sqrt{x^2+y^2+1}\,dx\,dy$$

極座標に変換すると，領域 D は次の不等式で表すことができる．

$$0\leqq r\leqq 1,\quad 0\leqq\theta\leqq 2\pi$$

よって

$$\begin{aligned}
S&=\iint_D\sqrt{r^2+1}\cdot r\,dr\,d\theta\\
&=\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^1 r\sqrt{r^2+1}\,dr\right\}d\theta
\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_0^1 r\sqrt{r^2+1}\,dr$ において，$r^2+1=t$ とおくと，$2r\,dr=dt$ より，$r\,dr=\dfrac{1}{2}\,dt$

また，r と t の対応は

r	$0\ \to\ 1$
t	$1\ \to\ 2$

よって

$$\begin{aligned}
\int_0^1 r\sqrt{r^2+1}\,dr&=\int_1^2\sqrt{t}\cdot\frac{1}{2}\,dt\\
&=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_1^2\\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)\\
&=\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
S&=\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)\,d\theta\\
&=\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)\int_0^{2\pi}d\theta\\
&=\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)\Big[\ \theta\ \Big]_0^{2\pi}\\
&=\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)\cdot 2\pi=\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi(2\sqrt{2}-1)}
\end{aligned}$$

4.（1）　$x-1=t$ とおくと，$dx=dt$

また，x と t の対応は

x	$1\ \to\ \infty$
t	$0\ \to\ \infty$

よって

$$\text{与式}=\int_0^{\infty}e^{-t^2}\,dt=\boldsymbol{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

（2）　$\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}=t$ とおくと，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}dx=dt$ より，$dx=\sqrt{2}\,dt$

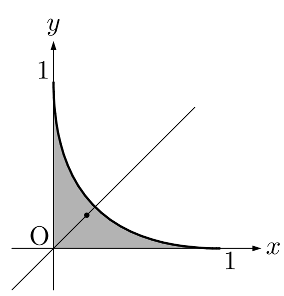
また，x と t の対応は

x	$-\infty\ \to\ \infty$
t	$-\infty\ \to\ \infty$

よって

$$\begin{aligned}
\text{与式}&=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}\cdot\sqrt{2}\,dt\\
&=\sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}\,dt\\
&=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\pi}=\boldsymbol{\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}$$

5.　領域 D は，直線 $y=x$ に関して対称だから，$\overline{x}=\overline{y}$



$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ より，$y=(1-\sqrt{x})^2=x-2\sqrt{x}+1$

よって，領域は，$0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq x-2\sqrt{x}+1$

以上より

$$\begin{aligned}
\iint_D x\,dx\,dy&=\int_0^1\left\{\int_0^{x-2\sqrt{x}+1}x\,dy\right\}dx\\
&=\int_0^1 x\Big[\ y\ \Big]_0^{x-2\sqrt{x}+1}dx\\
&=\int_0^1 x(x-2\sqrt{x}+1)\,dx\\
&=\int_0^1(x^2-2x^{\frac{3}{2}}+x)\,dx\\
&=\left[\frac{1}{3}x^3-2\cdot\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1\\
&=\frac{1}{3}-\frac{4}{5}+\frac{1}{2}=\frac{1}{30}
\end{aligned}$$

また

$$\iint_D dx\,dy = \int_0^1 \left\{ \int_0^{x-2\sqrt{x}+1} dy \right\} dx$$
$$= \int_0^1 \Big[\, y \,\Big]_0^{x-2\sqrt{x}+1} dx$$
$$= \int_0^1 (x - 2\sqrt{x} + 1)\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - 2\cdot\frac{2}{3}x\sqrt{x} + x \right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{4}{3} + 1 = \frac{1}{6}$$

よって

$$\overline{x} = \overline{y} = \frac{\displaystyle\iint_D x\,dx\,dy}{\displaystyle\iint_D dx\,dy} = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{5}$$

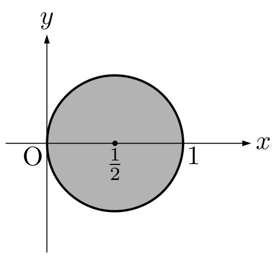
したがって，求める重心の座標は，$\left(\boldsymbol{\frac{1}{5}},\ \boldsymbol{\frac{1}{5}}\right)$

練習問題 2-B

1. $x^2 + y^2 \leqq x$ より

$$x^2 - x + y^2 \leqq 0$$
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + y^2 \leqq 0$$
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leqq \frac{1}{4}$$

領域を図示すると



極座標に変換すると，領域 D は次の不等式で表すことができる．

$$0 \leqq r \leqq \cos\theta,\quad -\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$$

よって

$$与式 = \iint_D \sqrt{r\cos\theta}\cdot r\,dr\,d\theta$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{\cos\theta} r\sqrt{r\cos\theta}\,dr \right\} d\theta$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sqrt{\cos\theta}\int_0^{\cos\theta} r\sqrt{r}\,dr \right\} d\theta$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos\theta} \left[\frac{2}{5} r^{\frac{5}{2}} \right]_0^{\cos\theta} d\theta$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos\theta} \left[\frac{2}{5} r^2\sqrt{r} \right]_0^{\cos\theta} d\theta$$
$$= \frac{2}{5}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta(\sqrt{\cos\theta})^2\,d\theta$$
$$= \frac{2}{5}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\,d\theta$$
$$= \frac{4}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\,d\theta \qquad (\cos^3\theta は偶関数)$$
$$= \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} = \boldsymbol{\frac{8}{15}}$$

2. $x = ar\cos\theta,\ \ y = br\sin\theta$ とおくと

$$\frac{a^2r^2\cos^2\theta}{a^2} + \frac{b^2r^2\sin^2\theta}{b^2} \leqq 1$$
$$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta \leqq 1$$

すなわち，$r^2 \leqq 1$ であるから，$0 \leqq r \leqq 1,\quad 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$

また

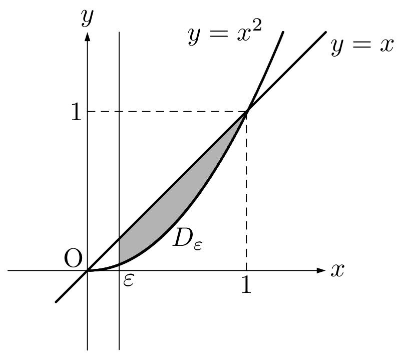
$$\frac{\partial x}{\partial r} = a\cos\theta,\quad \frac{\partial x}{\partial\theta} = -ar\sin\theta$$
$$\frac{\partial y}{\partial r} = b\sin\theta,\quad \frac{\partial y}{\partial\theta} = br\cos\theta$$

であるから，
$$\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(r,\ \theta)} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix}$$
$$= abr\cos^2\theta + abr\sin^2\theta$$
$$= abr(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = abr\ (\geqq 0)$$

よって

$$与式 = \iint_D \{(ar\cos\theta)^2 + (br\sin\theta)^2\}\cdot abr\,dr\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^1 r^2(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)abr\,dr \right\} d\theta$$
$$= ab\int_0^{2\pi} \left\{ (a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)\int_0^1 r^3\,dr \right\} d\theta$$
$$= ab\int_0^{2\pi} (a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta) \left[\frac{1}{4}r^4 \right]_0^1 d\theta$$
$$= ab\int_0^{2\pi} \frac{1}{4}(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)\,d\theta$$
$$= \frac{1}{4}ab\int_0^{2\pi} (a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)\,d\theta$$
$$= \frac{1}{4}ab\left(\int_0^{2\pi} a^2\cos^2\theta\,d\theta + \int_0^{2\pi} b^2\sin^2\theta\,d\theta \right)$$
$$= \frac{1}{4}ab\left(4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta + 4b^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\,d\theta \right)$$
$$= ab\left\{ a^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\pi\right) + b^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\pi\right) \right\}$$
$$= ab\left(\frac{\pi}{4}a^2 + \frac{\pi}{4}b^2 \right)$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2)}$$

3. 領域 D 内で，$f(0,\ 0)$ は定義されないので，図のような領域を考え，これを D_ε とする．また，この領域 D 内で，$\dfrac{x}{x^2+y^2} \geqq 0$



$$与式 = \lim_{\varepsilon\to+0} \iint_{D_\varepsilon} \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\,dy$$
$$= \lim_{\varepsilon\to+0} \int_\varepsilon^1 \left\{ \int_{x^2}^x \frac{x}{x^2+y^2}\,dy \right\} dx$$
$$= \lim_{\varepsilon\to+0} \int_\varepsilon^1 x\left[\frac{1}{x}\tan^{-1}\frac{y}{x} \right]_{x^2}^x dx$$
$$= \lim_{\varepsilon\to+0} \int_\varepsilon^1 (\tan^{-1}1 - \tan^{-1}x)\,dx$$
$$= \lim_{\varepsilon\to+0} \int_\varepsilon^1 \left(\frac{\pi}{4} - \tan^{-1}x \right) dx$$

ここで

$$\int \tan^{-1} x\,dx = \int (x)' \tan^{-1} x\,dx$$

$$= x\tan^{-1} x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= x\tan^{-1} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$= x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

よって

$$与式 = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\frac{\pi}{4}x - \left\{x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right\}\right]_{\varepsilon}^{1}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\left(\frac{\pi}{4} - \tan^{-1}1 + \frac{1}{2}\log 2\right) - \left(\frac{\pi}{4}\varepsilon - \varepsilon\tan^{-1}\varepsilon + \frac{1}{2}\log(1+\varepsilon^2)\right)\right\}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\log 2\right) - \left(\frac{\pi}{4}\varepsilon - \varepsilon\tan^{-1}\varepsilon + \frac{1}{2}\log(1+\varepsilon^2)\right)\right\}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}\log 2}$$

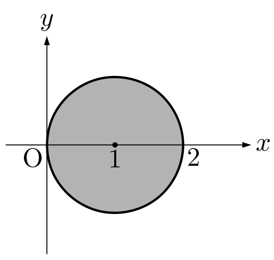
4. $x^2+y^2 \leqq 2x$ より

$x^2-2x+y^2 \leqq 0$

$(x-1)^2-1+y^2 \leqq 0$

$(x-1)^2+y^2 \leqq 1$

直円柱 F の底面を領域 D として，これを図示すると



極座標に変換すると，領域 D は次の不等式で表すことができる．

$0 \leqq r \leqq 2\cos\theta,\quad -\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$

（1） 求める体積を V とすると

$$V = \iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$= \iint_D r^2 \cdot r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{\int_0^{2\cos\theta} r^3\,dr\right\} d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^{2\cos\theta} d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\cdot 16\cos^4\theta\,d\theta$$

$$= 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\,d\theta$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\,d\theta$$

$$= 8\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \boldsymbol{\frac{3}{2}\pi}$$

（2） 求める体積を V とすると

$$V = \iint_D x^2\,dx\,dy$$

$$= \iint_D r^2\cos^2\theta \cdot r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{\int_0^{2\cos\theta} r^3\cos^2\theta\,dr\right\} d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{\cos^2\theta\int_0^{2\cos\theta} r^3\,dr\right\} d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^{2\cos\theta} d\theta$$

$$= 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\cdot\cos^4\theta\,d\theta$$

$$= 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\theta\,d\theta$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\theta\,d\theta$$

$$= 8\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \boldsymbol{\frac{5}{4}\pi}$$

5. （1） $\dfrac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma} = t$ とおくと，$\dfrac{1}{\sqrt{2}\sigma}dx = dt$ より，$dx = \sqrt{2}\sigma\,dt$

また，x と t の対応は

x	$-\infty$	$\to$	∞
t	$-\infty$	$\to$	∞

よって

$$左辺 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\cdot\sqrt{2}\sigma\,dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot\sqrt{2}\sigma\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\pi} = 1 = 右辺$$

（2） $\dfrac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma} = t$ とおくと，$\dfrac{1}{\sqrt{2}\sigma}dx = dt$ より，$dx = \sqrt{2}\sigma\,dt$

$x = \sqrt{2}\sigma t + \mu$

また，x と t の対応は

x	$-\infty$	$\to$	∞
t	$-\infty$	$\to$	∞

よって

$$左辺 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2}\sigma t+\mu)e^{-t^2}\cdot\sqrt{2}\sigma\,dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2}\sigma t+\mu)e^{-t^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2}\sigma t e^{-t^2}\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} \mu e^{-t^2}\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{2}\sigma\int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2}\,dt + \mu\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt\right)$$

ここで，不定積分 $\displaystyle\int te^{-t^2}\,dt$ を求める．

$-t^2 = u$ とおくと，$-2t\,dt = du$ より，$t\,dt = -\dfrac{1}{2}\,du$

よって

$$\int te^{-t^2}\,dt = \int e^u\cdot\left(-\frac{1}{2}\,du\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\int e^u\,du$$

$$= -\frac{1}{2}e^u = -\frac{1}{2}e^{-t^2}$$

したがって

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} te^{-t^2}\,dt &= \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b te^{-t^2}\,dt\\ &= \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_a^b\\ &= -\frac{1}{2}\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}(e^{-b^2}-e^{-a^2})=0\end{aligned}$$

以上より

$$\begin{aligned}\text{左辺} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{2}\sigma\int_{-\infty}^{\infty} te^{-t^2}\,dt+\mu\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{2}\sigma\cdot 0+\mu\cdot\sqrt{\pi})\\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\mu\sqrt{\pi}\\ &= \mu = \text{右辺}\end{aligned}$$

∎