2章　偏微分

練習問題 2-A

1. (1)　$z_x = 3x^2 + 2xy$ であるから

$$z_{xx} = \boldsymbol{6x + 2y}$$
$$z_{xy} = \boldsymbol{2x}$$

$z_y = x^2 + 3y^2$ であるから

$$z_{yy} = \boldsymbol{6y}$$
$$z_{yx} = \boldsymbol{2x} \quad (= z_{xy})$$

(2)　$z_x = -\dfrac{y}{x^2}$ であるから

$$z_{xx} = \boldsymbol{\frac{2y}{x^3}}$$
$$z_{xy} = \boldsymbol{-\frac{1}{x^2}}$$

$z_y = \dfrac{1}{x}$ であるから

$$z_{yy} = \boldsymbol{0}$$
$$z_{yx} = \boldsymbol{-\frac{1}{x^2}} \quad (= z_{xy})$$

(3)　$z = (2x^2 + 3y^2)^{\frac{1}{2}}$ とすれば

$$z_x = \frac{1}{2}(2x^2+3y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4x = 2x(2x^2+3y^2)^{-\frac{1}{2}}$$

であるから

$$\begin{aligned} z_{xx} &= 2(2x^2+3y^2)^{-\frac{1}{2}} + 2x \cdot \left\{-\frac{1}{2}(2x^2+3y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 4x\right\} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2x^2+3y^2}} - \frac{4x^2}{(2x^2+3y^2)\sqrt{2x^2+3y^2}} \\ &= \frac{2(2x^2+3y^2) - 4x^2}{(2x^2+3y^2)\sqrt{2x^2+3y^2}} \\ &= \boldsymbol{\frac{6y^2}{\sqrt{(2x^2+3y^2)^3}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{xy} &= 2x \cdot \left\{-\frac{1}{2}(2x^2+3y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 6y\right\} \\ &= \boldsymbol{-\frac{6xy}{\sqrt{(2x^2+3y^2)^3}}} \end{aligned}$$

$$z_y = \frac{1}{2}(2x^2+3y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 6y = 3y(2x^2+3y^2)^{-\frac{1}{2}}$$

であるから

$$\begin{aligned} z_{yy} &= 3(2x^2+3y^2)^{-\frac{1}{2}} + 3y \cdot \left\{-\frac{1}{2}(2x^2+3y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 6y\right\} \\ &= \frac{3}{\sqrt{2x^2+3y^2}} - \frac{9y^2}{(2x^2+3y^2)\sqrt{2x^2+3y^2}} \\ &= \frac{3(2x^2+3y^2) - 9y^2}{(2x^2+3y^2)\sqrt{2x^2+3y^2}} \\ &= \boldsymbol{\frac{6x^2}{(2x^2+3y^2)\sqrt{2x^2+3y^2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{yx} &= 3y \cdot \left\{-\frac{1}{2}(2x^2+3y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 4x\right\} \\ &= \boldsymbol{-\frac{6xy}{(2x^2+3y^2)\sqrt{2x^2+3y^2}}} \quad (= z_{xy}) \end{aligned}$$

(4)　$z_x = yx^{y-1}$ であるから

$$z_{xx} = \boldsymbol{y(y-1)x^{y-2}}$$

$$\begin{aligned} z_{xy} &= x^{y-1} + y \cdot x^{y-1}\log x \\ &= \boldsymbol{(1 + y\log x)x^{y-1}} \end{aligned}$$

$z_y = x^y \log x$ であるから

$$\begin{aligned} z_{yy} &= x^y \log x \cdot \log x \\ &= \boldsymbol{x^y(\log x)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{yx} &= yx^{y-1}\log x + x^y \cdot \frac{1}{x} \\ &= yx^{y-1}\log x + x^{y-1} \\ &= \boldsymbol{(y\log x + 1)x^{y-1}} \quad (= z_{xy}) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} z_x &= \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \\ &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \left(= x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{xx} &= (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} + x\left\{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{x^2+y^2-x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{xy} &= x\left\{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2y\right\} \\ &= -\frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_y &= \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y \\ &= \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \left(= y(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{yy} &= (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} + y\left\{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2y\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{x^2+y^2-y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \end{aligned}$$

(1)

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} + \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\right) \\ &= \sqrt{x^2+y^2} \cdot \frac{y^2+x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1 = \text{左辺} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \left\{-\frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\right\}^2 \\ &= \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \frac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \\ &= \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^3} \end{aligned}$$

よって，左辺 $=$ 右辺

3. (1)　$f(x,\ y) = x^4 + y^3 + 32x - 9y$ とおくと

$f_x(x,\ y) = 4x^3 + 32$

$f_y(x,\ y) = 3y^2 - 9$

$f_x(x,\ y) = 0$ より，$x^3 = -8$ であるから，$x = -2$

$f_y(x,\ y) = 0$ より，$y^2 = 3$ であるから，$y = \pm\sqrt{3}$

よって，極値をとり得る点は，$(-2,\ \pm\sqrt{3})$ である．

第 2 次導関数は

$f_{xx}(x,\ y) = 12x^2,\ \ f_{xy}(x,\ y) = 0,\ \ f_{yy}(x,\ y) = 6y$ で

あるから，$(-2,\ \sqrt{3})$ に対して

$$H = f_{xx}(-2,\ \sqrt{3})f_{yy}(-2,\ \sqrt{3}) - \{f_{xy}(-2,\ \sqrt{3})\}^2$$
$$= \{12\cdot(-2)^2\}(6\cdot\sqrt{3}) - 0^2$$
$$= 48\cdot 6\sqrt{3} = 288\sqrt{3} > 0$$

また，$f_{xx}(-2,\ \sqrt{3}) = 48 > 0$

以上より，$f(x,^y)$ は，点 $(-2,\ \sqrt{3})$ で極小となる．

極小値は

$$f(-2,\ \sqrt{3}) = (-2)^4 + (\sqrt{3})^3 + 32\cdot(-2) - 9\sqrt{3}$$
$$= 16 + 3\sqrt{3} - 64 - 9\sqrt{3}$$
$$= -48 - 6\sqrt{3}$$

また，$(-2,\ -\sqrt{3})$ に対して

$$H = f_{xx}(-2,\ -\sqrt{3})f_{yy}(-2,\ -\sqrt{3}) - \{f_{xy}(-2,\ -\sqrt{3})\}^2$$
$$= \{12\cdot(-2)^2\}\}6\cdot(-\sqrt{3})\} - 0^2$$
$$= 48\cdot(-6\sqrt{3}) = -288\sqrt{3} < 0$$

よって，$f(x,\ y)$ は，点 $(-2,\ -\sqrt{3})$ では極値をとらない．

以上より，z は，点 $(-2,\ \sqrt{3})$ で**極小値 $\boldsymbol{-48-6\sqrt{3}}$** をとる．

（2）　$f(x,\ y) = -3x^2 + 2x\sqrt{y} + 8x - y - 4$ とおくと

$$f_x(x,\ y) = -6x + 2\sqrt{y} + 8$$
$$f_y(x,\ y) = 2x\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}} - 1 = \frac{x}{\sqrt{y}} - 1$$

$f_y(x,\ y) = 0$ より，$\dfrac{x}{\sqrt{y}} = 1$，すなわち，$\sqrt{y} = x$

$f_x(x,\ y) = 0$ より，$-6x + 2\sqrt{y} + 8 = 0$ であるから，これに，$\sqrt{y} = x$ を代入して

$$-6x + 2x + 8 = 0$$
$$-4x = -8$$
$$x = 2$$

これより，$\sqrt{y} = 2$，すなわち，$y = 4$

よって，極値をとり得る点は，$(2,\ 4)$ である．

第 2 次導関数は

$f_{xx}(x,\ y) = -6,\quad f_{xy}(x,\ y) = \dfrac{1}{\sqrt{y}},\quad f_{yy}(x,\ y) = -\dfrac{x}{2y\sqrt{y}}$ であるから，$(2,\ 4)$ に対して

$$H = f_{xx}(2,\ 4)f_{yy}(2,\ 4) - \{f_{xy}(2,\ 4)\}^2$$
$$= -6\cdot\left(-\frac{2}{2\cdot 4\sqrt{4}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{4}}\right)^2$$
$$= -6\cdot\left(-\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{4}$$
$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} > 0$$

また，$f_{xx}(2,\ 4) = -6 < 0$

以上より，$f(x,\ y)$ は，点 $(2,\ 4)$ で極大となる．

極大値は

$$f(2,\ 4) = -3\cdot 2^2 + 2\cdot 2\sqrt{4} + 8\cdot 2 - 4 - 4$$
$$= -12 + 8 + 16 - 8 = 4$$

よって，z は，点 $(2,\ 4)$ で**極大値 4** をとる．

4.　$\varphi(x,\ y) = x^2 + 4y^2 - 4$ とおくと

$$\varphi_x(x,\ y) = 2x$$
$$\varphi_y(x,\ y) = 8y$$

（1）　$z_x = 1,\ z_y = 2$ であるから，z が極値をとり得る点で，次の式が成り立つ．

$$\frac{1}{2x} = \frac{2}{8y}$$

これより，$x = 2y$ であるから，これを $x^2 + 4y^2 = 4$ に代入して

$$(2y)^2 + 4y^2 = 4$$
$$8y^2 = 4$$
$$y^2 = \frac{1}{2}$$
$$y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

また，$x = 2y = \pm\sqrt{2}$

よって，極値をとり得る点は，$\left(\pm\sqrt{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ （複号同順）である．

ここで，曲線 $x^2 + 4y^2 = 4$ 上の点を，$x = 2\cos\theta,\ y = \sin\theta$ と表せば，z は θ の連続関数であるから最大値，最小値をもち，曲線上に端点はないので，最大値，最小値は極値をとり得る点でとる．それぞれの点における z の値を求めると

$\left(\sqrt{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ のとき，　$z = \sqrt{2} + 2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

$\left(-\sqrt{2},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ のとき，$z = -\sqrt{2} + 2\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2}$

よって

点 $\left(\sqrt{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ において，最大値　$\boldsymbol{2\sqrt{2}}$

点 $\left(-\sqrt{2},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ において，最小値　$\boldsymbol{-2\sqrt{2}}$

（2）　$z_x = y,\ z_y = x$ であるから，z が極値をとり得る点で，次の式が成り立つ．

$$\frac{y}{2x} = \frac{x}{8y}$$

これより，$x^2 = 4y^2$ であるから，これを $x^2 + 4y^2 = 4$ に代入して

$$x^2 + x^2 = 4$$
$$x^2 = 2$$
$$x = \pm\sqrt{2}$$

また，$y^2 = \dfrac{1}{4}x^2 = \dfrac{1}{2}$ より，$y = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

よって，極値をとり得る点は，$\left(\pm\sqrt{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ （複号は任意）である．

ここで，曲線 $x^2 + 4y^2 = 4$ 上の点を，$x = 2\cos\theta,\ y = \sin\theta$ と表せば，z は θ の連続関数であるから最大値，最小値をもち，曲線上に端点はないので，最大値，最小値は極値をとり得る点でとる．それぞれの点における z の値を求めると

$\left(\pm\sqrt{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ （複号同順）のとき

$$z = \pm\sqrt{2}\cdot\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1$$

$\left(\pm\sqrt{2},\ \mp\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ （複号同順）のとき

$$z = \pm\sqrt{2}\cdot\left(\mp\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1$$

よって

点 $\left(\pm\sqrt{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ （複号同順）において，最大値　**1**

点 $\left(\pm\sqrt{2},\ \mp\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ （複号同順）において，最小値　**−1**

5.（1） $f(x,\ y,\ z) = xyz - a^3$ とおく．

$f_x(x,\ y,\ z) = yz$

$f_y(x,\ y,\ z) = zx$

$f_z(x,\ y,\ z) = xy$

よって，求める接平面の方程式は

$y_0z_0(x - x_0) + z_0x_0(y - y_0) + x_0y_0(z - z_0) = 0$

整理すると

$y_0z_0x - x_0y_0z_0 + z_0x_0y - x_0y_0z_0 + x_0y_0z - x_0y_0z_0 = 0$

$y_0z_0x + z_0x_0y + x_0y_0z = 3x_0y_0z_0$

ここで，点 $\mathrm{P}\,(x_0,\ y_0,\ z_0)$ は，曲面 $xyz = a^3$ 上にあるから，$x_0y_0z_0 = a^3$

したがって，$\boldsymbol{y_0z_0x + z_0x_0y + x_0y_0z = 3a^3}$

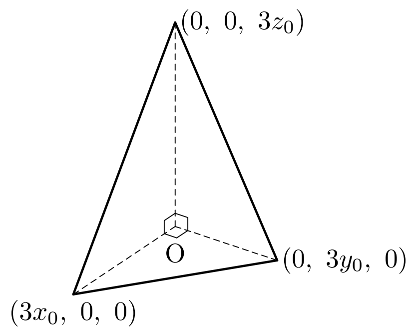
（2） 平面と各座標軸との交点の座標を求める．

$y_0z_0x + z_0x_0y + x_0y_0z = 3x_0y_0z_0$ において，$y = 0,\ z = 0$ とすれば，$x = 3x_0$

よって，接平面と x 軸との交点は，$(3x_0,\ 0,\ 0)$

同様にして，接平面と y 軸との交点は，$(0,\ 3y_0,\ 0)$

接平面と z 軸との交点は，$(0,\ 0,\ 3z_0)$



よって，求める三角錐の体積は

$\dfrac{1}{2}|\,3x_0\,||\,3y_0\,| \times |\,3z_0\,| \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{9}{2}|\,x_0y_0z_0\,|$

$= \dfrac{9}{2}|\,a^3\,|$

ここで，a は正の定数なので，$\dfrac{9}{2}|\,a^3\,| = \boldsymbol{\dfrac{9}{2}a^3}$

6. 円柱の底面の半径を x，高さを y とおく．

表面積が一定であるから，$2\pi x^2 + 2\pi xy = c$ （c は正の定数）とするときの，$V = \pi x^2 y$ の最大値を考えればよい．

$\varphi(x,\ y) = 2\pi x^2 + 2\pi xy - c$ とすれば

$\varphi_x = 4\pi x + 2\pi y, \quad \varphi_y = 2\pi x$

また

$V_x = 2\pi xy, \quad V_y = \pi x^2$

よって，$\dfrac{2\pi xy}{4\pi x + 2\pi y} = \dfrac{\pi x^2}{2\pi x}$ より，$\dfrac{y}{2x + y} = \dfrac{1}{2}$

すなわち，$y = 2x$

これを，$2\pi x^2 + 2\pi xy = c$ に代入して

$2\pi x^2 + 4\pi x^2 = c$

$6\pi x^2 = c$

$x^2 = \dfrac{c}{3\pi}$

$x > 0$ より，これを満たす x はただ一つ存在する．最大値が存在し，極値をとり得る点が一つであるから，この点が最大値を与える点である．

このとき，$y = 2x$ であるから，半径と高さの比は

$x : y = x : 2x = \mathbf{1 : 2}$

7. $f(x,\ y,\ \alpha) = x + 2\alpha y - 2\alpha^3$ とおくと

$f_\alpha(x,\ y,\ \alpha) = 2y - 6\alpha^2$

したがって，包絡線の方程式は，次の 2 式から α を消去すれば得られる．

$$\begin{cases} x + 2\alpha y - 2\alpha^3 = 0 & \cdots ① \\ 2y - 6\alpha^2 = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

② より，$y = 3\alpha^2 \cdots ②'$

これを ① に代入して

$x + 2\alpha \cdot 3\alpha^2 - 2\alpha^3 = 0$

これより，$x = -4\alpha^3 \cdots ③$

②′ より，$y^3 = 27\alpha^6$

③ より，$x^2 = 16\alpha^6$

よって，包絡線の方程式は，$\dfrac{y^3}{27} = \dfrac{x^2}{16}$

すなわち，$\boldsymbol{16y^3 = 27x^2}$

練習問題 2-B

1. $f_y(x_0,\ y_0) \fallingdotseq 0$ のとき，陰関数の微分法より，$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{f_x}{f_y}$

よって，点 $\mathrm{P}\,(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式は

$y - y_0 = -\dfrac{f_x(x_0,\ y_0)}{f_y(x_0,\ y_0)}(x - x_0)$

変形すると

$f_y(x_0,\ y_0)(y - y_0) = -f_x(x_0,\ y_0)(x - x_0)$

すなわち，$f_x(x_0,\ y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,\ y_0)(y - y_0) = 0$

$f_y(x_0,\ y_0) = 0$ のとき，$f_x(x_0,\ y_0) = 0$ となる点は特異点となるので，$f_x(x_0,\ y_0) \fallingdotseq 0$

このとき，$\dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{f_y}{f_x}$ であるから，点 $\mathrm{P}\,(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式は

$x - x_0 = -\dfrac{f_y(x_0,\ y_0)}{f_x(x_0,\ y_0)}(y - y_0)$

変形すると

$f_x(x_0,\ y_0)(x - x_0) = -f_y(x_0,\ y_0)(y - y_0)$

すなわち，$f_x(x_0,\ y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,\ y_0)(y - y_0) = 0$

2.（1） $f(x,\ y) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1$ とすると

$f_x(x,\ y) = \dfrac{2x}{a^2}$

$f_y(x,\ y) = \dfrac{2y}{b^2}$

よって，求める接線の方程式は

$\dfrac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \dfrac{2y_0}{b^2}(y - y_0) = 0$

整理すると

$\dfrac{x_0x}{a^2} - \dfrac{{x_0}^2}{a^2} + \dfrac{y_0y}{b^2} - \dfrac{{y_0}^2}{b^2} = 0$

$\dfrac{x_0x}{a^2} + \dfrac{y_0y}{b^2} = \dfrac{{x_0}^2}{a^2} + \dfrac{{y_0}^2}{b^2}$

$\mathrm{P}\,(x_0,\ y_0)$ は楕円上の点であるから，$\dfrac{{x_0}^2}{a^2} + \dfrac{{y_0}^2}{b^2} = 1$

したがって，$\boldsymbol{\dfrac{x_0x}{a^2} + \dfrac{y_0y}{b^2} = 1}$

（2） $f(x,\ y) = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1$ とすると

$f_x(x,\ y) = \dfrac{2x}{a^2}$

$f_y(x,\ y) = -\dfrac{2y}{b^2}$

よって，求める接線の方程式は

$\dfrac{2x_0}{a^2}(x - x_0) - \dfrac{2y_0}{b^2}(y - y_0) = 0$

整理すると

$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{{x_0}^2}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}+\frac{{y_0}^2}{b^2}=0$$

$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=\frac{{x_0}^2}{a^2}-\frac{{y_0}^2}{b^2}$$

P$(x_0,\ y_0)$ は双曲線上の点であるから，$\dfrac{{x_0}^2}{a^2}-\dfrac{y_0}{b^2}=1$

したがって，$\boldsymbol{\dfrac{x_0x}{a^2}-\dfrac{y_0y}{b^2}=1}$

（3） $f(x,\ y)=y^2-4px$ とすると

$f_x(x,\ y)=-4p$

$f_y(x,\ y)=2y$

よって，求める接線の方程式は

$$-4p(x-x_0)+2y_0(y-y_0)=0$$

整理すると

$$-2px+2px_0+y_0y-{y_0}^2=0$$

$$y_0y=2px-2px_0+{y_0}^2$$

P$(x_0,\ y_0)$ は双曲線上の点であるから，${y_0}^2=4px_0$

したがって

$$y_0y=2px-2px_0+4px_0$$

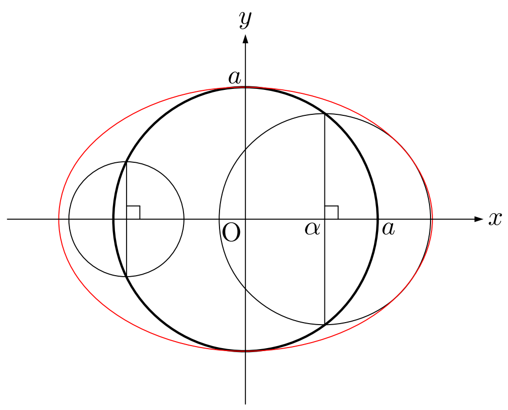
$$y_0y=2px+2px_0$$

すなわち，$\boldsymbol{y_0y=2p(x+x_0)}$

3. 円の中心は x 軸上にあるので，円の中心の座標を $(\alpha,\ 0)$ とすれば，半径は $\sqrt{a^2-\alpha^2}$ となるので，円の方程式は

$$(x-\alpha)^2+y^2=a^2-\alpha^2$$

これより，$(x-\alpha)^2+y^2-a^2+\alpha^2=0$



$f(x,\ y,\ \alpha)=(x-\alpha)^2+y^2-a^2+\alpha^2$ とおくと

$$f_\alpha(x,\ y,\ \alpha)=2(x-\alpha)\cdot(-1)-2\alpha=-2(x-\alpha)+2\alpha$$

したがって，包絡線の方程式は，次の 2 式から α を消去すれば得られる．

$$\begin{cases}(x-\alpha)^2+y^2-a^2+\alpha^2=0 & \cdots ① \\ -2(x-\alpha)+2\alpha=0 & \cdots ②\end{cases}$$

② より，$-2x+2\alpha+2\alpha=0\cdots②'$

すなわち，$x=2\alpha$

これより，$\alpha=\dfrac{x}{2}$

これを ① に代入して

$$\left(x-\frac{x}{2}\right)^2+y^2-a^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=0$$

$$\frac{x^2}{4}+y^2-a^2+\frac{x^2}{4}=0$$

$$\frac{x^2}{2}+y^2=a^2$$

すなわち，求める包絡線は楕円 $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{2a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1}$ である．

4. $\varphi(x,\ y,\ z)=0$ を満たす z が $x,\ y$ の関数とすると，陰関数の微分法により

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{\varphi_x}{\varphi_z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{\varphi_y}{\varphi_z}\end{cases}\quad\cdots①$$

このとき，$w=f(x,\ y,\ z)$ は $x,\ y$ の関数となり，w が極値をとる点において

$$\begin{cases}w_x=f_x+f_z\dfrac{\partial z}{\partial x}=0 \\ w_y=f_y+f_z\dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$$

が成り立つ．① を代入して

$$\begin{cases}f_x-f_z\dfrac{\varphi_x}{\varphi_z}=0 \ \text{ より，}f_x=\dfrac{f_z}{\varphi_z}\varphi_x \\ f_y-f_z\dfrac{\varphi_y}{\varphi_z}=0 \ \text{ より，}f_y=\dfrac{f_z}{\varphi_z}\varphi_y\end{cases}$$

ここで，$\dfrac{f_z}{\varphi_z}=\lambda\ \ (f_z=\lambda\varphi_z)$ とおけば

$$f_x=\lambda\varphi_x,\quad f_y=\lambda\varphi_y$$

以上より，極値をとる点において，$f_x=\lambda\varphi_x,\ \ f_y=\lambda\varphi_y,\ \ f_z=\lambda\varphi_z$ を満たす λ が存在する．

5. 縦，横，高さが $x,\ y,\ z$ の直方体の体積であるから，$\boldsymbol{V=xyz}$

$\varphi(x,\ y,\ z)=\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{36}+\dfrac{z^2}{16}-1$ とおくと，$\varphi(x,\ y,\ z)=0$ のときの $V=xyz\ \ (x>0,\ y>0,\ z>0)$ の最大値を求めればよい．

ここで，$\varphi_x=\dfrac{2}{9}x,\quad \varphi_y=\dfrac{1}{18}y,\quad \varphi_z=\dfrac{1}{8}z$

また，$V_x=yz,\quad V_y=xz,\quad V_z=xy$

よって，極値をとる点において，次の等式を満たす λ が存在する．

$$yz=\frac{2}{9}\lambda x,\quad xz=\frac{1}{18}\lambda y,\quad xy=\frac{1}{8}\lambda z$$

3 式を λ について解くと

$$\begin{cases}\lambda=\dfrac{9yz}{2x} & \cdots① \\ \lambda=\dfrac{18zx}{y} & \cdots② \\ \lambda=\dfrac{8xy}{z} & \cdots③\end{cases}$$

①，② より，$\dfrac{9yz}{2x}=\dfrac{18zx}{y}$

これより，$y^2=4x^2\cdots④$

①，③ より，$\dfrac{9yz}{2x}=\dfrac{8xy}{z}$

これより，$9z^2=16x^2$，すなわち，$z^2=\dfrac{16}{9}x^2\cdots⑤$

④，⑤ を，$\varphi(x,\ y,\ z)=0$ に代入すると

$$\frac{x^2}{9}+\frac{4x^2}{36}+\frac{16}{9}\cdot\frac{x^2}{16}-1=0$$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{x^2}{9}+\frac{x^2}{9}-1=0$$

$$\frac{x^2}{3}=1$$

$$x^2=3$$

$x>0$ より，$x=\sqrt{3}$

④ より，$y^2=4\cdot(\sqrt{3})^2=12$

$y>0$ より，$y=2\sqrt{3}$

⑤ より，$z^2=\dfrac{16}{9}\cdot(\sqrt{3})^2=\dfrac{16}{3}$

$z>0$ より，$z=\dfrac{4}{\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

よって，V は $\left(\sqrt{3},\ 2\sqrt{3},\ \dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ で最大値をとり，その値は

$$V=\sqrt{3}\cdot2\sqrt{3}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3}=\boldsymbol{8\sqrt{3}}$$