2章　偏微分

BASIC

69（1）　$z_x = 3 \cdot 3x^2y^2 - 4 \cdot 2xy^3$

$= 9x^2y^2 - 8xy^3$

よって

$z_{xx} = 9 \cdot 2xy^2 - 8 \cdot y^3$

$= \mathbf{18xy^2 - 8y^3}$

$z_{xy} = 9 \cdot 2x^2y - 8 \cdot 3xy^2$

$= \mathbf{18x^2y - 24xy^2}$

$z_y = 3 \cdot 2x^3y - 4 \cdot 3x^2y^2$

$= 6x^3y - 12x^2y^2$

よって

$z_{yx} = 6 \cdot 3x^2y - 12 \cdot 2xy^2$

$= \mathbf{18x^2y - 24xy^2}$

$z_{yy} = 6 \cdot x^3 - 12 \cdot 2x^2y$

$= \mathbf{6x^3 - 24x^2y}$

（2）　$z_x = \dfrac{1 \cdot (x+y) - (x-y) \cdot 1}{(x+y)^2}$

$= \dfrac{2y}{(x+y)^2}$

よって

$z_{xx} = -\dfrac{2y \cdot 2(x+y) \cdot 1}{\{(x+y)^2\}^2}$

$= -\dfrac{4y(x+y)}{(x+y)^4}$

$= \boldsymbol{-\dfrac{4y}{(x+y)^3}}$

$z_{xy} = \dfrac{2 \cdot (x+y)^2 - 2y \cdot 2(x+y) \cdot 1}{\{(x+y)^2\}^2}$

$= \dfrac{2(x^2+2xy+y^2) - 2(2xy+2y^2)}{(x+y)^4}$

$= \dfrac{2(x^2+2xy+y^2-2xy-2y^2)}{(x+y)^4}$

$= \dfrac{2(x^2-y^2)}{(x+y)^4}$

$= \dfrac{2(x+y)(x-y)}{(x+y)^4} = \boldsymbol{\dfrac{2(x-y)}{(x+y)^3}}$

$z_y = \dfrac{-1 \cdot (x+y) - (x-y) \cdot 1}{(x+y)^2}$

$= \dfrac{-2x}{(x+y)^2} = -\dfrac{2x}{(x+y)^2}$

よって

$z_{yx} = -\dfrac{2 \cdot (x+y)^2 - 2x \cdot 2(x+y) \cdot 1}{\{(x+y)^2\}^2}$

$= -\dfrac{2(x^2+2xy+y^2) - 2(2x^2+2xy)}{(x+y)^4}$

$= -\dfrac{2(x^2+2xy+y^2-2x^2-2xy)}{(x+y)^4}$

$= \dfrac{2(x^2-y^2)}{(x+y)^4}$

$= \dfrac{2(x+y)(x-y)}{(x+y)^4} = \boldsymbol{\dfrac{2(x-y)}{(x+y)^3}}$

$z_{yy} = -\left\{-\dfrac{2x \cdot 2(x+y) \cdot 1}{\{(x+y)^2\}^2}\right\}$

$= \dfrac{4x(x+y)}{(x+y)^4}$

$= \boldsymbol{\dfrac{4x}{(x+y)^3}}$

（3）　$z_x = \cos xy \cdot y = y \cos xy$

よって

$z_{xx} = y \cdot (-\sin xy \cdot y)$

$= \boldsymbol{-y^2 \sin xy}$

$z_{xy} = 1 \cdot \cos xy + y \cdot (-\sin xy \cdot x)$

$= \boldsymbol{\cos xy - xy \sin xy}$

$z_y = \cos xy \cdot x = x \cos xy$

よって

$z_{yx} = 1 \cdot \cos xy + x \cdot (-\sin xy \cdot y)$

$= \boldsymbol{\cos xy - xy \sin xy}$

$z_{yy} = x \cdot (-\sin xy \cdot x)$

$= \boldsymbol{-x^2 \sin xy}$

（4）　$z_x = \dfrac{1}{xy} \cdot y = \dfrac{1}{x}$

よって

$z_{xx} = \boldsymbol{-\dfrac{1}{x^2}}$

$z_{xy} = \mathbf{0}$

$z_y = \dfrac{1}{xy} \cdot x = \dfrac{1}{y}$

よって

$z_{yx} = \mathbf{0}$

$z_{yy} = \boldsymbol{-\dfrac{1}{y^2}}$

（5）　$z_x = \dfrac{1}{2}(2x-y+2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = (2x-y+2)^{-\frac{1}{2}}$

よって

$z_{xx} = -\dfrac{1}{2}(2x-y+2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2$

$= \boldsymbol{-(2x-y+2)^{-\frac{3}{2}}}$

$= \boldsymbol{-\dfrac{1}{(2x-y+2)\sqrt{2x-y+2}}}$

$z_{xy} = -\dfrac{1}{2}(2x-y+2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-1)$

$= \dfrac{1}{2}(2x-y+2)^{-\frac{3}{2}}$

$= \boldsymbol{\dfrac{1}{2}(2x-y+2)^{-\frac{3}{2}}}$

$= \boldsymbol{\dfrac{1}{2(2x-y+2)\sqrt{2x-y+2}}}$

$z_y = \dfrac{1}{2}(2x-y+2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1) = -\dfrac{1}{2}(2x-y+2)^{-\frac{1}{2}}$

よって

$z_{yx} = -\dfrac{1}{2}x \cdot \left\{-\dfrac{1}{2}(2x-y+2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2\right\}$

$= \boldsymbol{\dfrac{1}{2}(2x-y+2)^{-\frac{3}{2}}}$

$= \boldsymbol{\dfrac{1}{2(2x-y+2)\sqrt{2x-y+2}}}$

$$z_{yy} = -\frac{1}{2}\cdot\left\{-\frac{1}{2}(2x-y+2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-1)\right\}$$
$$= \boldsymbol{-\frac{1}{4}(2x-y+2)^{-\frac{3}{2}}}$$
$$= \boldsymbol{-\frac{1}{4(2x-y+2)\sqrt{2x-y+2}}}$$

（6） $z_x = \dfrac{1}{x-y+1}\cdot 1 = \dfrac{1}{x-y+1}$

よって

$$z_{xx} = -(x-y+1)^{-2}\cdot 1$$
$$= \boldsymbol{-(x-y+1)^{-2}}$$
$$= \boldsymbol{-\frac{1}{(x-y+1)^2}}$$
$$z_{xy} = -(x-y+1)^{-2}\cdot(-1)$$
$$= \boldsymbol{(x-y+1)^{-2}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{(x-y+1)^2}}$$

$z_y = \dfrac{1}{x-y+1}\cdot(-1) = -\dfrac{1}{x-y+1}$

よって

$$z_{yx} = -\{-(x-y+1)^{-2}\cdot 1\}$$
$$= \boldsymbol{(x-y+1)^{-2}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{(x-y+1)^2}}$$
$$z_{yy} = -\{-(x-y+1)^{-2}\cdot(-1)\}$$
$$= \boldsymbol{-(x-y+1)^{-2}}$$
$$= \boldsymbol{-\frac{1}{(x-y+1)^2}}$$

（7） $z_x = 1\cdot e^{x-y} + x\cdot e^{x-y}\cdot 1 = (x+1)e^{x-y}$

よって

$$z_{xx} = 1\cdot e^{x-y} + (x+1)e^{x-y}\cdot 1$$
$$= \boldsymbol{(x+2)e^{x-y}}$$
$$z_{xy} = (x+1)e^{x-y}\cdot(-1)$$
$$= \boldsymbol{-(x+1)e^{x-y}}$$

$z_y = xe^{x-y}\cdot(-1) = -xe^{x-y}$

よって

$$z_{yx} = -(1\cdot e^{x-y} + xe^{x-y}\cdot 1)$$
$$= \boldsymbol{-(x+1)e^{x-y}}$$
$$z_{yy} = -xe^{x-y}\cdot(-1)$$
$$= \boldsymbol{xe^{x-y}}$$

70（1） $z_x = y^3 - 4xy$ より， $z_{xy} = \boldsymbol{3y^2-4x}$

$z_y = 3xy^2 - 2x^2$ より， $z_{yx} = \boldsymbol{3y^2-4x}$

また， $z_{xx} = -4y$ より， $z_{xxy} = \boldsymbol{-4}$

$z_{xy} = 3y^3 - 4x$ より， $z_{xyx} = \boldsymbol{-4}$

$z_{yx} = 3y^2 - 4x$ より， $z_{yxx} = \boldsymbol{-4}$

以上より， $\boldsymbol{z_{xxy} = z_{xyx} = z_{yxx}}$

（2） $z_x = -\dfrac{2}{(2x+3y)^2}$ より

$$z_{xy} = -\left\{-\frac{2\cdot 2(2x+3y)\cdot 3}{(2x+3y)^4}\right\} = \boldsymbol{\frac{12}{(2x+3y)^3}}$$

$z_y = -\dfrac{3}{(2x+3y)^2}$ より

$$z_{yx} = -\left\{-\frac{3\cdot 2(2x+3y)\cdot 2}{(2x+3y)^4}\right\} = \boldsymbol{\frac{12}{(2x+3y)^3}}$$

また， $z_{xx} = -\left\{-\dfrac{2\cdot 2(2x+3y)\cdot 2}{(2x+3y)^4}\right\} = \dfrac{8}{(2x+3y)^3}$

より

$$z_{xxy} = -\frac{8\cdot 3(2x+3y)^2\cdot 3}{(2x+3y)^6} = \boldsymbol{-\frac{72}{(2x+3y)^4}}$$

$z_{xy} = \dfrac{12}{(2x+3y)^3}$ より

$$z_{xyx} = -\frac{12\cdot 3(2x+3y)^2\cdot 2}{(2x+3y)^6} = \boldsymbol{-\frac{72}{(2x+3y)^4}}$$

$z_{yx} = \dfrac{12}{(2x+3y)^3}$ より

$$z_{yxx} = -\frac{12\cdot 3(2x+3y)^2\cdot 2}{(2x+3y)^6} = \boldsymbol{-\frac{72}{(2x+3y)^4}}$$

以上より， $\boldsymbol{z_{xxy} = z_{xyx} = z_{yxx}}$

（3） $z_x = -\sin(2x-y)\cdot 2 = -2\sin(2x-y)$ より

$z_{xy} = -2\{\cos(2x-y)\cdot(-1)\} = \boldsymbol{2\cos(2x-y)}$

$z_y = -\sin(2x-y)\cdot(-1) = \sin(2x-y)$ より

$z_{yx} = \cos(2x-y)\cdot 2 = \boldsymbol{2\cos(2x-y)}$

また

$z_{xx} = -2\cdot\cos(2x-y)\cdot 2 = -4\cos(2x-y)$ 　より

$z_{xxy} = -4\{-\sin(2x-y)\cdot(-1)\} = \boldsymbol{-4\sin(2x-y)}$

$z_{xy} = 2\cos(2x-y)$ より

$z_{xyx} = 2\{-\sin(2x-y)\cdot 2\} = \boldsymbol{-4\sin(2x-y)}$

$z_{yx} = -2\cos(2x-y)$ より

$z_{yxx} = -2\cdot\sin(2x-y)\cdot 2 = \boldsymbol{-4\sin(2x-y)}$

以上より， $\boldsymbol{z_{xxy} = z_{xyx} = z_{yxx}}$

（4） $z_x = e^{-xy}\cdot(-y) = -ye^{-xy}$ より

$z_{xy} = -\{e^{-xy} + ye^{-xy}\cdot(-x)\} = \boldsymbol{(xy-1)e^{-xy}}$

$z_y = e^{-xy}\cdot(-x) = -xe^{-xt}$ より

$z_{yx} = -\{e^{-xy} + xe^{-xy}\cdot(-y)\} = \boldsymbol{(xy-1)e^{-xy}}$

また

$z_{xx} = -ye^{-xy}\cdot(-y) = y^2e^{-xy}$ より

$$z_{xxy} = 2ye^{-xy} + y^2e^{-xy}\cdot(-x)$$
$$= 2ye^{-xy} - xy^2e^{-xy} = \boldsymbol{y(2-xy)e^{-xy}}$$

$z_{xy} = (xy-1)e^{-xy}$ より

$$z_{xyx} = ye^{-xy} + (xy-1)e^{-xy}\cdot(-y)$$
$$= ye^{-xy} - y(xy-1)e^{-xy} = \boldsymbol{y(2-xy)e^{-xy}}$$

$z_{yx} = (xy-1)e^{-xy}$ より

$$z_{yxx} = ye^{-xy} + (xy-1)e^{-xy}\cdot(-y)$$
$$= ye^{-xy} - y(xy-1)e^{-xy} = \boldsymbol{y(2-xy)e^{-xy}}$$

以上より， $\boldsymbol{z_{xxy} = z_{xyx} = z_{yxx}}$

71 $\dfrac{d^2z}{dt^2} = h^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2hk\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + k^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdots$ ① は証明済みとします.

$x = a+ht,\ y = b+kt$ より， $\dfrac{dx}{dt} = h,\ \dfrac{dy}{dt} = k$

① より

$$\begin{aligned}
左辺 &= \frac{d^3z}{dt^3} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(h^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(h^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\frac{dx}{dt} \\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial y}\left(h^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\frac{dy}{dt} \\
&= \left(h^2\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 2hk\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + k^2\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}\right)\cdot h \\
&\qquad + \left(h^2\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 2hk\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + k^2\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right)\cdot k \\
&= h^3\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 2h^2k\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + hk^2\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} \\
&\qquad + h^2k\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 2hk^2\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + k^3\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} \\
&= h^3\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3h^2k\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + 3hk^2\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + k^3\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 右辺
\end{aligned}$$

72（1）　$z_x = 2x + y - 5$

$z_y = x + 2y - 1$

よって，極値をとり得る点の座標が満たす必要条件は

$$\begin{cases} 2x + y - 5 = 0 & \cdots ① \\ x + 2y - 1 = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

① より，$y = -2x + 5$

これを ② に代入して

$x + 2(-2x + 5) - 1 = 0$

$x - 4x + 10 - 1 = 0$

$-3x = -9$

$x = 3$

これより，$y = -2 \cdot 3 + 5 = -1$

したがって，極値をとり得る点は $\mathbf{(3,\ -1)}$

（2）　$z_x = 2x + 2y - 2$

$z_y = 2x + 4y - 2$

よって，極値をとり得る点の座標が満たす必要条件は

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 & \cdots ① \\ x + 2y - 1 = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

② − ① より，$y = 0$

これを ① に代入して

$x + 0 - 1 = 0$

$x = 1$

したがって，極値をとり得る点は $\mathbf{(1,\ 0)}$

（3）　$z_x = 2x + 4y$

$z_y = 4x + 3y^2 + 4y + 1$

よって，極値をとり得る点の座標が満たす必要条件は

$$\begin{cases} x + 2y = 0 & \cdots ① \\ 4x + 3y^2 + 4y + 1 = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

① より，$x = -2y$

これを ② に代入して

$4 \cdot (-2y) + 3y^2 + 4y + 1 = 0$

$3y^2 - 4y + 1 = 0$

$(3y - 1)(y - 1) = 0$

$y = 1,\ \dfrac{1}{3}$

$y = 1$ のとき，$x = -2$

$y = \dfrac{1}{3}$ のとき，$x = -\dfrac{2}{3}$

したがって，極値をとり得る点は $\mathbf{(-2,\ 1)}$，$\mathbf{\left(-\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)}$

73（1）　$z_x = 2x - y = 0$

$z_y = -x + 2y - 3 = 0$

これを解いて，$x = 1,\ y = 2$

よって，極値をとり得る点は，$(1,\ 2)$ である．

第 2 次導関数は

$z_{xx} = 2,\quad z_{xy} = -1,\quad z_{yy} = 2$ であるから，$(1,\ 2)$ に対して

$H = 2 \cdot 2 - (-1)^2$

$= 3 > 0$

また，$z_{xx} = 2 > 0$

よって，z は，点 $(1,\ 2)$ で極小となる．

極小値は

$z = 1^2 - 1 \cdot 2 + 2^2 - 3 \cdot 2$

$= 1 - 2 + 4 - 6 = -3$

よって，z は，点 $(1,\ 2)$ で**極小値 $\mathbf{-3}$** をとる．

（2）　$z_x = 3x^2 - 3 = 0 \ \cdots ①$

$z_y = -3y^2 + 12 = 0 \ \cdots ②$

① より，$x = \pm 1$

② より，$y = \pm 2$

よって，極値をとり得る点は

$(1,\ 2), (1,\ -2), (-1,\ 2), (-1,\ -2)$

である．

第 2 次導関数は，$z_{xx} = 6x,\quad z_{xy} = 0,\quad z_{yy} = -6y$

i) $(1,\ 2)$ に対して

$H = (6 \cdot 1) \times (-6 \cdot 2) - 0^2$

$= -72 < 0$

よって，z は，点 $(1,\ 2)$ で極値をとらない．

ii) $(1,\ -2)$ に対して

$H = (6 \cdot 1) \times \{-6 \cdot (-2)\} - 0^2$

$= 72 > 0$

また，$z_{xx} = 6 \cdot 1 = 6 > 0$

よって，z は，点 $(1,\ -2)$ で極小となる．

極小値は

$z = 1^3 - (-2)^3 - 3 \cdot 1 + 12 \cdot (-2)$

$= 1 + 8 - 3 - 24 = -18$

iii) $(-1,\ 2)$ に対して

$H = \{6 \cdot (-1)\} \times (-6 \cdot 2) - 0^2$

$= 72 > 0$

また，$z_{xx} = 6 \cdot (-1) = -6 < 0$

よって，z は，点 $(-1,\ 2)$ で極大となる．

極大値は

$z = (-1)^3 - 2^3 - 3 \cdot (-1) + 12 \cdot 2$

$= -1 - 8 + 3 + 24 = 18$

iv) $(-1,\ -2)$ に対して

$H = \{6 \cdot (-1)\} \times \{-6 \cdot (-2)\} - 0^2$

$= -72 < 0$

よって，z は，点 $(-1,\ -2)$ で極値をとらない．

以上より，z は

点 $(1,\ -2)$ で**極小値** $\boldsymbol{-18}$

点 $(-1,\ 2)$ で**極大値** $\boldsymbol{18}$

をとる．

（3）　$z_x = 24x^2 - 6y = 0 \cdots ①$

$z_y = -6x - 3y^2 = 0 \cdots ②$

① より，$y = 4x^2\ \cdots ①'$

② に代入して

$-6x - 3 \cdot (4x^2)^2 = 0$

$-6x - 48x^4 = 0$

$x(8x^3 + 1) = 0$

$x(2x+1)(4x^2 - 2x + 1) = 0$

これを満たす実数解は，$x = 0,\ -\dfrac{1}{2}$

これらを $①'$ に代入すると

$x = 0$ のとき，$y = 0$

$x = -\dfrac{1}{2}$ のとき，$y = 4 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 = 1$

よって，極値をとり得る点は，$(0,\ 0)$，$\left(-\dfrac{1}{2},\ 1\right)$ である．

第 2 次導関数は

$z_{xx} = 48x,\quad z_{xy} = -6,\quad z_{yy} = -6y$

i) $(0,\ 0)$ に対して

$$H = (48 \cdot 0) \times (-6 \cdot 0) - (-6)^2$$
$$= -36 < 0$$

よって，z は，点 $(0,\ 0)$ で極値をとらない．

ii) $\left(-\dfrac{1}{2},\ 1\right)$ に対して

$$H = \left\{48 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right\} \times (-6 \cdot 1) - (-6)^2$$
$$= -24 \cdot (-6) - 36 = 108 > 0$$

また，$z_{xx} = 48 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -24 < 0$

以上より，z は，点 $(1,\ -2)$ で極大となる．

極大値は

$$z = 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 - 1^2$$
$$= -1 + 3 - 1 = 1$$

よって，z は，点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ 1\right)$ で**極大値 1** をとる．

（4）　$z_x = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \cdots ①$

$z_y = 2y - 2 = 0 \cdots ②$

① より，$x^2 - 2x - 3 = 0$

これより，$(x-3)(x+1) = 0$ であるから，$x = 3,\ -1$

② より，$y = 1$

よって，極値をとり得る点は，$(3,\ 1)$，$(-1, 1)$ である．

第 2 次導関数は

$z_{xx} = 6x - 6,\quad z_{xy} = 0,\quad z_{yy} = 2$

i) $(3,\ 1)$ に対して

$$H = (6 \cdot 3 - 6) \times 2 - 0^2$$
$$= 24 > 0$$

また，$z_{xx} = 6 \cdot 3 - 6 = 12 > 0$

よって，z は，点 $(3,\ 1)$ で極小となる．

極小値は

$$z = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 1^2 - 2 \cdot 1$$
$$= 27 - 27 - 27 + 1 - 2 = -28$$

ii) $(-1,\ 1)$ に対して

$$H = \{6 \cdot (-1) - 6\} \times 2 - 0^2$$
$$= -24 < 0$$

よって，z は，点 $(-1,\ 1)$ で極値をとらない．

以上より，z は，点 $(3,\ 1)$ で**極小値** $\boldsymbol{-28}$ をとる．

74（1）　$f = x^2 - xy + 2y^2 - 1$ とおくと

$f_x = 2x - y$

$f_y = -x + 4y$

よって

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x - y}{-x + 4y}$$
$$= \boldsymbol{\frac{2x - y}{x - 4y}}$$

（2）　$f = x^3 + y^3 - 3x^2y$ とおくと

$f_x = 3x^2 - 6xy$

$f_y = 3y^2 - 3x^2$

よって

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 - 6xy}{3y^2 - 3x^2} = -\frac{3(x^2 - 2xy)}{3(y^2 - x^2)}$$
$$= \boldsymbol{\frac{x^2 - 2xy}{x^2 - y^2}}$$

（3）　$f = x + y + \log(x^2 + y) - 1$ とおくと

$f_x = 1 + \dfrac{1}{x^2 + y} \cdot 2x = 1 + \dfrac{2x}{x^2 + y}$

$f_y = 1 + \dfrac{1}{x^2 + y} \cdot 1 = 1 + \dfrac{1}{x^2 + y}$

よって

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1 + \dfrac{2x}{x^2 + y}}{1 + \dfrac{1}{x^2 + y}} = \boldsymbol{-\frac{x^2 + y + 2x}{x^2 + y + 1}}$$
$$= \boldsymbol{-\frac{x^2 + 2x + y}{x^2 + y + 1}}$$

（4）　$f = \sqrt{x} + \sqrt{y} - 1$ とおくと

$f_x = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f_y = \dfrac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$

よって

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{y}}} = \boldsymbol{-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}}$$

（5）　$f = \sin x + \cos y - 1$ とおくと

$f_x = \cos x$

$f_y = -\sin y$

よって

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos x}{-\sin y} = \boldsymbol{\frac{\cos x}{\sin y}}$$

（6）　$f = e^x + e^y - x - y$ とおくと

$f_x = e^x - 1$

$f_y = e^y - 1$

よって

$$\frac{dy}{dx} = \boldsymbol{-\frac{e^x - 1}{e^y - 1}}$$

75（1）　$f = x^2 + y^2 - z^2 - 1$ とおくと

$f_x = 2x$

$f_y = 2y$

$f_z = -2z$

よって

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{-2z} = \boldsymbol{\frac{x}{z}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{-2z} = \boldsymbol{\frac{y}{z}}$$

（2）　$f = z^2 + xyz + 1$ とおくと

$f_x = yz$

$f_y = xz$

$f_z = 2z + xy$

よって

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \boldsymbol{-\frac{yz}{2z + xy}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \boldsymbol{-\frac{xz}{2z + xy}}$$

（3）　$f = \sin x + \sin y + \sin z - 1$ とおくと

$f_x = \cos x$

$f_y = \cos y$

$f_z = \cos z$

よって

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \boldsymbol{-\frac{\cos x}{\cos z}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \boldsymbol{-\frac{\cos y}{\cos z}}$$

（4）　$f = \log(x^2 + y^2 + z^2) - 2$ とおくと

$$f_x = \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$f_y = \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$f_z = \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

よって

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}}{\dfrac{2z}{x^2 + y^2 + z^2}} = \boldsymbol{-\frac{x}{z}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{2y}{x^2 + y^2 + z^2}}{\dfrac{2z}{x^2 + y^2 + z^2}} = \boldsymbol{-\frac{y}{z}}$$

（5）　$f = e^{x+y} + e^{y+z} + e^{z+x} - 2$ とおくと

$f_x = e^{x+y} + e^{z+x}$

$f_y = e^{x+y} + e^{y+z}$

$f_z = e^{y+z} + e^{z+x}$

よって

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \boldsymbol{-\frac{e^{x+y} + e^{z+x}}{e^{y+z} + e^{z+x}}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \boldsymbol{-\frac{e^{x+y} + e^{y+z}}{e^{y+z} + e^{z+x}}}$$

（6）　$f = \cos(xyz) - 1$ とおくと

$f_x = -\sin(xyz) \cdot yz = -yz\sin(xyz)$

$f_y = -\sin(xyz) \cdot xz = -xz\sin(xyz)$

$f_z = -\sin(xyz) \cdot xy = -xy\sin(xyz)$

よって

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-yz\sin(xyz)}{-xy\sin(xyz)} = \boldsymbol{-\frac{z}{x}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-xz\sin(xyz)}{-xy\sin(xyz)} = \boldsymbol{-\frac{z}{y}}$$

76（1）　$f = xy + yz + zx - 1$ とおくと

$f_x = y + z$

$f_y = x + z$

$f_z = y + x$

よって，点 $(1,\ 0,\ 1)$ における接平面の方程式は

$(0+1)(x-1) + (1+1)(y-0) + (0+1)(z-1) = 0$

$(x-1) + 2y + (z-1) = 0$

$\boldsymbol{x + 2y + z = 2}$

（2）　$f = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - 4$ とおくと

$$f_x = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f_y = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$f_z = \frac{1}{2\sqrt{z}}$$

よって，点 $(1,\ 1,\ 4)$ における接平面の方程式は

$$\frac{1}{2\sqrt{1}}(x-1) + \frac{1}{2\sqrt{1}}(y-1) + \frac{1}{2\sqrt{4}}(z-4) = 0$$

$$\frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{4}(z-4) = 0$$

$2(x-1) + 2(y-1) + (z-4) = 0$

$\boldsymbol{2x + 2y + z = 8}$

（3）　$x = 2,\ y = 1$ を $x^2 - 3y^2 + z = 0$ に代入して

$2^2 - 3 \cdot 1^2 + z = 0$

これより，$z = -1$

したがって，接点の座標は，$(2,\ 1,\ -1)$

$f = x^2 - 3y^2 + z$ とおくと

$f_x = 2x$

$f_y = -6y$

$f_z = 1$

よって，点 $(2,\ 1,\ -1)$ における接平面の方程式は

$2 \cdot 2(x-2) - 6 \cdot 1(y-1) + 1 \cdot (z+1) = 0$

$4(x-2) - 6(y-1) + (z+1) = 0$

$\boldsymbol{4x - 6y + z = 1}$

（4）　$x = 1,\ y = e$ を $x\log y - \log z = 0$ に代入して

$1 \cdot \log e - \log z = 0$

$\log z = 1$

これより，$z = e$

したがって，接点の座標は，$(1,\ e,\ e)$

$f = x\log y - \log z$ とおくと

$f_x = \log y$

$$f_y = x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{y}$$

$$f_z = -\frac{1}{z}$$

よって，点 $(1,\ e,\ e)$ における接平面の方程式は

$$\log e(x-1) + \frac{1}{e}(y-e) - \frac{1}{e}(z-e) = 0$$

$e(x-1) + (y-e) - (z-e) = 0$

$\boldsymbol{ex + y - z = e}$

77　条件式が $x^2 + y^2 = 3$ であるから，最大値・最小値は極値をとり得る点でとる．

（1）　$\varphi(x,\ y) = x^2 + y^2 - 3,\ \ f(x,\ y) = x - y$ とおく．

$\varphi_x = 2x, \quad \varphi_y = 2y$

また

$f_x = 1, \quad f_y = -1$

よって，$\dfrac{1}{2x} = \dfrac{-1}{2y}$ より，$y = -x \cdots ①$

これを，$x^2 + y^2 = 3$ に代入して

$2x^2 = 3$

$x^2 = \dfrac{3}{2}$

$x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

① に代入して

$y = \mp\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

以上より，極値をとり得る点は

$\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$，$\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ \dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$

各点における z の値を求めると

$\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$ のとき，$z = \dfrac{\sqrt{6}}{2} - \left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right) = \sqrt{6}$

$\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ \dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$ のとき，$z = -\dfrac{\sqrt{6}}{2} - \dfrac{\sqrt{6}}{2} = -\sqrt{6}$

以上より

点 $\boldsymbol{\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)}$ において，最大値 $\boldsymbol{\sqrt{6}}$

点 $\boldsymbol{\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ \dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)}$ において，最小値 $\boldsymbol{-\sqrt{6}}$

（2）　$\varphi(x,\ y) = x^2 + y^2 - 3$，$f(x,\ y) = x^2y$ とおく．

$\varphi_x = 2x,\quad \varphi_y = 2y$

また

$f_x = 2xy,\quad f_y = x^2$

よって，$\dfrac{2xy}{2x} = \dfrac{x^2}{2y}$ より，$x^2 = 2y^2 \cdots$①

これを，$x^2 + y^2 = 3$ に代入して

$3x^2 = 3$

$y^2 = 1$

$y = \pm 1$

① に代入して

$x^2 = 2$，すなわち，$x = \pm\sqrt{2}$

以上より，極値をとり得る点は

$(\sqrt{2},\ 1)$，$(\sqrt{2},\ -1)$，$(-\sqrt{2},\ 1)$，$(-\sqrt{2},\ -1)$

各点における z の値を求めると

$(\sqrt{2},\ 1)$ のとき，$z = (\sqrt{2})^2 \cdot 1 = 2$

$(\sqrt{2},\ -1)$ のとき，$z = (\sqrt{2})^2 \cdot (-1) = -2$

$(-\sqrt{2},\ 1)$ のとき，$z = (-\sqrt{2})^2 \cdot 1 = 2$

$(-\sqrt{2},\ -1)$ のとき，$z = (-\sqrt{2})^2 \cdot (-1) = -2$

以上より

点 $\boldsymbol{(\sqrt{2},\ 1)}$，$\boldsymbol{(-\sqrt{2},\ 1)}$ において，最大値 **2**

点 $\boldsymbol{(\sqrt{2},\ -1)}$，$\boldsymbol{(-\sqrt{2},\ -1)}$ において，最小値 $\boldsymbol{-2}$

78　底面の正方形の 1 辺の長さを x，高さを y とおく．

容積が $4\,\mathrm{cm}^2$ であるから，$x^2y = 4$ とするときの，$S = x^2 + xy \times 4 = x^2 + 4xy$ の最小値を考えればよい．

$\varphi(x,\ y) = x^2y - 4$ とすれば

$\varphi_x = 2xy,\quad \varphi_y = x^2$

また

$S_x = 2x + 4y,\quad S_y = 4x$

よって，$\dfrac{2x+4y}{2xy} = \dfrac{4x}{x^2}$ より，$\dfrac{x+2y}{y} = 4$

すなわち，$x = 2y$

これを，$x^2y = 4$ に代入して

$4y^3 = 4$

$y^3 = 1$

y は実数で，$y > 0$ より，$y = 1$，このとき，$x = 2$

最小値が存在し，極値をとり得る点が一つであるから，この点が最小値を与える点である．

よって，底面の正方形の 1 辺の長さ：**2** cm，　高さ：**1** cm

79（1）　$f(x,\ y,\ \alpha) = x - (y-\alpha)^2 - 3$ とおくと

$f_\alpha(x,\ y,\ \alpha) = -2(y-\alpha)\cdot(-1) = 2(y-\alpha)$

よって，包絡線の方程式は，次の 2 式から α を消去すればよい．

$$\begin{cases} x - (y-\alpha)^2 - 3 = 0 & \cdots ① \\ 2(y-\alpha) = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

② より

$\alpha = y$

これを，① に代入して

$x - (y-y)^2 - 3 = 0$

$\boldsymbol{x = 3}$

（2）　$f(x,\ y,\ \alpha) = \dfrac{x}{\alpha} + \alpha y - 1$ とおくと

$f_\alpha(x,\ y,\ \alpha) = -\dfrac{x}{\alpha^2} + y$

よって，包絡線の方程式は，次の 2 式から α を消去すればよい．

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\alpha} + \alpha y - 1 = 0 & \cdots ① \\ -\dfrac{x}{\alpha^2} + y = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

② より

$y = \dfrac{x}{\alpha^2}$

$\alpha^2 = \dfrac{x}{y}\quad \cdots ②'$

また，① より，$\dfrac{x}{\alpha} + \alpha y = 1$

両辺を 2 乗して

$\dfrac{x^2}{\alpha^2} + 2xy + \alpha^2y^2 = 1$

これに ②′ を代入して

$\dfrac{x^2}{\frac{x}{y}} + 2xy + \dfrac{x}{y}\cdot y^2 = 1$

$xy + 2xy + xy = 1$

$\boldsymbol{4xy = 1}$