2章　偏微分

§１　偏微分法 (p.26〜p.38)

問１

与えられた平面の方程式は，$2x + y + z - 4 = 0$ とかけるので，法線ベクトルの１つは

(2, 1, 1)

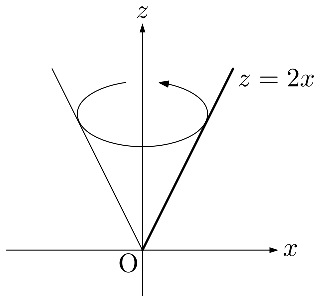
※ このベクトルの実数倍はすべて法線ベクトルとなる．

$(-2,\ -1,\ -1)$，$(6,\ 3,\ 3)$ など．

問２　立体的な図は，教科書の解答を参考にしてください．

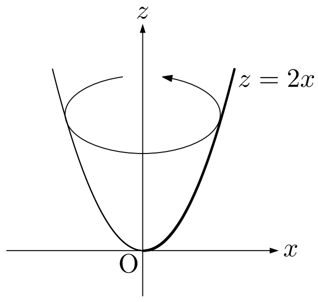
（1）　$y = 0$，$(x \geqq 0)$ とすれば，$z = 2x$

よって，求める曲面は，zx 平面上のこの曲線を，z 軸のまわりに回転してできる回転面である．



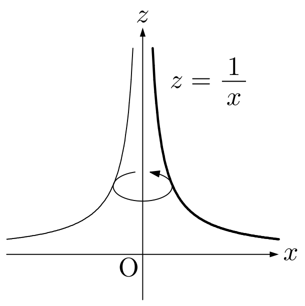
（2）　$y = 0$ とすれば，$z = x^2$

よって，求める曲面は，zx 平面上のこの曲線を，z 軸のまわりに回転してできる回転面である．



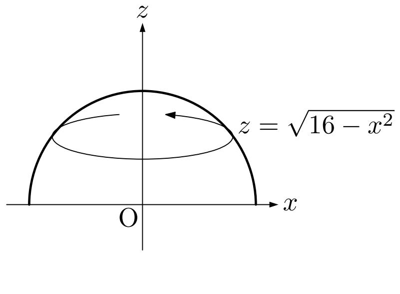
（3）　$y = 0$，$(x \geqq 0)$ とすれば，$z = \dfrac{1}{x}$

よって，求める曲面は，zx 平面上のこの曲線を，z 軸のまわりに回転してできる回転面である．



（4）　$y = 0$ とすれば，$z = \sqrt{16 - x^2}$　$(-4 \leqq x \leqq 4)$

これより，$x^2 + z^2 = 4^4$，$z \geqq 0$ であるから，求める曲面は，図のような半円を，z 軸のまわりに回転してできる回転面である．



問３

（1）
$$z_x = 4 \cdot 3x^2y - 6 \cdot 2xy^4$$
$$= \boldsymbol{12x^2y - 12xy^4}$$
$$z_y = 4x^3 + 6x^2 \cdot 4y^3$$
$$= \boldsymbol{4x^3 - 24x^2y^3}$$

（2）
$$z_x = \frac{1}{5x - 2y} \cdot 5$$
$$= \boldsymbol{\frac{5}{5x - 2y}}$$
$$z_y = \frac{1}{5x - 2y} \cdot (-2)$$
$$= \boldsymbol{-\frac{2}{5x - 2y}}$$

（3）
$$z_x = \boldsymbol{\cos x \cos 2y}$$
$$z_y = \sin x \cdot (-\sin 2y) \cdot 2$$
$$= \boldsymbol{-2 \sin x \sin 2y}$$

（4）
$$z_x = e^{-2x} \cdot (-2) \sin 6y$$
$$= \boldsymbol{-2e^{-2x} \sin 6y}$$
$$z_y = e^{-2x} \cos 6y \cdot 6$$
$$= \boldsymbol{6e^{-2x} \cos 6y}$$

（5）
$$z_x = \frac{2(x + 3y) - (2x - y) \cdot 1}{(x + 3y)^2}$$
$$= \frac{2x + 6y - 2x + y}{(x + 3y)^2} = \boldsymbol{\frac{7y}{(x + 3y)^2}}$$
$$z_y = \frac{-(x + 3y) - (2x - y) \cdot 3}{(x + 3y)^2}$$
$$= \frac{-x - 3y - 6x + 3y}{(x + 3y)^2} = \boldsymbol{\frac{-7x}{(x + 3y)^2}}$$

（6）
$$z_x = \boldsymbol{(2x - y) \log y}$$
$$z_y = (-x) \log y + (x^2 - xt) \cdot \frac{1}{y}$$
$$= \frac{-xy \log y + x^2 - xy}{y}$$
$$= \boldsymbol{\frac{x(-y \log y + x - y)}{y}}$$

問４

（1）
$$f_x(x,\ y) = 2x + y$$
$$f_y(x,\ y) = x + 2y$$
これより
$$f_x(1,\ 0) = 2 \cdot 1 + 0 = \mathbf{2}$$
$$f_y(1,\ 0) = 1 + 2 \cdot 0 = \mathbf{1}$$

（2）
$$f_x(x,\ y) = e^{x^2+y^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2+y^2}$$
$$f_y(x,\ y) = e^{x^2+y^2} \cdot 2y = 2ye^{x^2+y^2}$$
これより
$$f_x(1,\ 0) = 2 \cdot 1 \cdot e^{1^2+0^2} = \boldsymbol{2e}$$
$$f_y(1,\ 0) = 2 \cdot 0 \cdot e^{1^2+0^2} = \mathbf{0}$$

（3）
$$f_x(x,\ y) = \frac{y(x + y) - xy \cdot 1}{(x + y)^2}$$
$$= \frac{xy + y^2 - xy}{(x + y)^2} = \frac{y^2}{(x + y)^2}$$

$$f_y(x,\ y) = \frac{x(x+y) - xy \cdot 1}{(x+y)^2}$$
$$= \frac{x^2 + xy - xy}{(x+y)^2} = \frac{x^2}{(x+y)^2}$$

これより

$$f_x(1,\ 0) = \frac{0^2}{(1+0)^2} = \mathbf{0}$$
$$f_y(1,\ 0) = \frac{1^2}{(1+0)^2} = \mathbf{1}$$

（4） $$f_x(x,\ y) = 2\sqrt{x+y} + (2x+y) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+y}}$$
$$= \frac{4(\sqrt{x+y})^2 + (2x+y)}{2\sqrt{x+y}}$$
$$= \frac{4x+4y+2x+y}{2\sqrt{x+y}} = \frac{6x+5y}{2\sqrt{x+y}}$$
$$f_y(x,\ y) = 1\sqrt{x+y} + (2x+y) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+y}}$$
$$= \frac{2(\sqrt{x+y})^2 + (2x+y)}{2\sqrt{x+y}}$$
$$= \frac{2x+2y+2x+y}{2\sqrt{x+y}} = \frac{4x+3y}{2\sqrt{x+y}}$$

これより

$$f_x(1,\ 0) = \frac{6 \cdot 1 + 5 \cdot 0}{2\sqrt{1+0}} = \frac{6}{2} = \mathbf{3}$$
$$f_y(1,\ 0) = \frac{4 \cdot 1 + 3 \cdot 0}{2\sqrt{1+0}} = \frac{4}{2} = \mathbf{2}$$

問 5

（1） $$f_x(x,\ y,\ z) = 2x - 3yz$$
$$f_y(x,\ y,\ z) = 2y - 3xz$$
$$f_z(x,\ y,\ z) = 2z - 3xy$$

これより

$$f_x(1,\ 1,\ 0) = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 0 = \mathbf{2}$$
$$f_y(1,\ 1,\ 0) = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 0 = \mathbf{2}$$
$$f_z(1,\ 1,\ 0) = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1 \cdot 1 = \mathbf{-3}$$

（2） $$f_x(x,\ y,\ z) = \boldsymbol{-\frac{y+2z}{x^2}}$$
$$f_y(x,\ y,\ z) = \boldsymbol{\frac{1}{x}}$$
$$f_z(x,\ y,\ z) = \boldsymbol{\frac{2}{x}}$$

これより

$$f_x(1,\ 1,\ 0) = -\frac{1 + 2 \cdot 0}{1} = \mathbf{-1}$$
$$f_y(1,\ 1,\ 0) = \frac{1}{1} = \mathbf{1}$$
$$f_z(1,\ 1,\ 0) = \frac{2}{1} = \mathbf{2}$$

問 6

（1） $$z_x = 2x + y$$
$$z_y = x - 2y$$

よって，$dz = z_x dx + z_y dy$

$$= \boldsymbol{(2x+y)dx + (x-2y)dy}$$

（2） $$z_x = \cos(2x+y) \cdot 2 = 2\cos(2x+y)$$
$$z_y = \cos(2x+y)$$

よって，$dz = z_x dx + z_y dy$

$$= \boldsymbol{2\cos(2x+y)dx + \cos(2x+y)dy}$$

（3） $$z_x = \frac{10x}{5x^2 + y^4}$$
$$z_y = \frac{4y^3}{5x^2 + y^4}$$

よって，$dz = z_x dx + z_y dy$

$$= \boldsymbol{\frac{10x}{5x^2+y^4}dx + \frac{4y^3}{5x^2+y^4}dy}$$

問 7

$V = \dfrac{1}{3}\pi x^2 y$ であるから

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{3}\pi \cdot 2x \cdot y = \frac{2}{3}\pi xy$$
$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{3}\pi x^2$$

よって，$\Delta V \fallingdotseq \dfrac{\partial V}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial V}{\partial y}\Delta y$

$$= \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi xy \Delta x + \frac{1}{3}\pi x^2 \Delta y}$$

問 8

（1） $z_x = y,\ \ z_y = x$

これより，$x = 2,\ y = 3$ のとき，$z_x = 3,\ z_y = 2$ であるから，求める接平面の方程式は

$$z - 6 = 3(x-2) + 2(y-3)$$

整理して

$$z - 6 = 3x - 6 + 2y - 6$$
$$\boldsymbol{3x + 2y - z = 6}$$

（2） $$z_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$z_y = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$x = 3,\ y = 4$ のとき，$z = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$

また，$z_x = \dfrac{3}{5},\ z_y = \dfrac{4}{5}$ であるから，求める接平面の方程式は

$$z - 5 = \frac{3}{5}(x-3) + \frac{4}{5}(y-4)$$

整理して

$$5(z-5) = 3(x-3) + 4(y-4)$$
$$5z - 25 = 3x - 9 + 4y - 16$$
$$\boldsymbol{3x + 4y - 5z = 0}$$

問 9

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2t}{(t^2+1)^2}$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{2t+1}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2t+1}}$$

よって，$\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}$

$$= \boldsymbol{-\frac{2t}{(t^2+1)^2}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{2t+1}}\frac{\partial z}{\partial y}}$$

問 10

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2(x+2y) - (2x+3y) \cdot 1}{(x+2y)^2}$$
$$= \frac{2x+4y-2x-3y}{(x+2y)^2} = \frac{y}{(x+2y)^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3(x+2y) - (2x+3y) \cdot 2}{(x+2y)^2}$$
$$= \frac{3x+6y-4x-6y}{(x+2y)^2} = -\frac{x}{(x+2y)^2}$$

また，$\dfrac{dx}{dt} = e^t,\ \ \dfrac{dy}{dt} = -e^{-t}$

よって，
$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= \frac{y}{(x+2y)^2}e^t - \frac{x}{(x+2y)^2}\cdot(-e^{-t}) \\ &= \frac{e^{-t}}{(e^t+2e^{-t})^2}e^t + \frac{e^t}{(e^t+2e^{-t})^2}e^{-t} \\ &= \frac{e^{-t}\cdot e^t + e^t\cdot e^{-t}}{(e^t+2e^{-t})^2} \\ &= \frac{1+1}{(e^t+2e^{-t})^2} = \boldsymbol{\frac{2}{(e^t+2e^{-t})^2}}\end{aligned}$$

問 11

$$\frac{\partial x}{\partial u} = e^u\cos v,\quad \frac{\partial x}{\partial v} = -e^u\sin v$$
$$\frac{\partial y}{\partial u} = e^u\sin v,\quad \frac{\partial y}{\partial v} = e^u\cos v$$

よって
$$\begin{aligned}z_u &= z_x\frac{\partial x}{\partial u} + z_y\frac{\partial y}{\partial u} \\ &= \boldsymbol{z_x e^u\cos v + z_y e^u\sin v}\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}z_v &= z_x\frac{\partial x}{\partial v} + z_y\frac{\partial y}{\partial v} \\ &= \boldsymbol{-z_x e^u\sin v + z_y e^u\cos v}\end{aligned}$$

問 12

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y,\quad \frac{\partial f}{\partial y} = x$$
$$\frac{\partial x}{\partial u} = 2u,\quad \frac{\partial x}{\partial v} = 1$$
$$\frac{\partial y}{\partial u} = 3,\quad \frac{\partial y}{\partial v} = 4v$$

よって
$$\begin{aligned}f_u &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\ &= y\cdot 2u + x\cdot 3 \\ &= 2u(3u+2v^2) + 3(u^2+v) \\ &= 6u^2 + 4uv^2 + 3u^2 + 3v = \boldsymbol{9u^2 + 4uv^2 + 3v}\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}f_v &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \\ &= y\cdot 1 + x\cdot 4v \\ &= (3u+2v^2) + 4v(u^2+v) \\ &= 3u + 2v^2 + 4u^2v + 4v^2 = \boldsymbol{6v^2 + 4u^2v + 3u}\end{aligned}$$