1章　関数の展開

練習問題 1-A

1. (1) $f(x)=\log x$ とおくと

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$

これより，$x=1$ における1次近似式は

$$\begin{aligned} &f(1)+f'(1)(x-1)\\ &=\log 1+\frac{1}{1}(x-1)\\ &=0+(x-1)\\ &=x-1 \end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{-1+x}$

(2) $f(x)=\sin 2x$ とおくと

$f'(x)=2\cos 2x$

これより，$x=\dfrac{\pi}{2}$ における1次近似式は

$$\begin{aligned} &f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\\ &=\sin\pi+2\cos\pi\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\\ &=0+2\cdot(-1)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\\ &=-2x+\pi \end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{\pi-2x}$

(3) $f(x)=\tan x$ とおくと

$f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

これより，$x=\dfrac{\pi}{2}$ における1次近似式は

$$\begin{aligned} &f(0)+f'(0)(x-0)\\ &=\tan 0+\frac{1}{\cos^2 0}\cdot x\\ &=0+\frac{1}{1}x=x \end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{x}$

(4) $f(x)=\sqrt{e^x}=e^{\frac{x}{2}}$ とおくと

$f'(x)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{e^x}$

これより，$x=0$ における1次近似式は

$$\begin{aligned} &f(0)+f'(0)(x-0)\\ &=\sqrt{e^0}+\frac{1}{2}\sqrt{e^0}(x-0)\\ &=1+\frac{1}{2}x \end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{1+\dfrac{1}{2}x}$

2. (1) $f(x)=(1-x)^{\frac{1}{2}}$ であるから

$$\begin{aligned} f'(x)&=\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-1)\\ &=-\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\\ f''(x)&=-\frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}\right\}\cdot(-1)\\ &=-\frac{1}{4}(1-x)^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

これより，$x=0$ における2次近似式は

$$\begin{aligned} &f(0)+f'(0)(x-0)+\frac{f''(0)}{2}(x-0)^2\\ &=\sqrt{1-0}-\frac{1}{2}(1-0)^{-\frac{1}{2}}(x-0)\\ &\qquad-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(1-0)^{-\frac{3}{2}}(x-0)^2\\ &=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2 \end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{1-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2}$

(2) $\sqrt{0.8}=\sqrt{1-0.2}$ と考えると

$$\begin{aligned} \sqrt{0.8}=\sqrt{1-0.2}&\fallingdotseq 1-\frac{1}{2}\cdot 0.2-\frac{1}{8}\cdot(0.2)^2\\ &=1-0.1-\frac{1}{8}\cdot 0.04\\ &=1-0.1-0.005=\mathbf{0.895} \end{aligned}$$

※ 誤差が大きいです。

3. (1)
$$\begin{aligned} f'(x)&=1\cdot\log x+(x+1)\cdot\frac{1}{x}-2x\\ &=\boldsymbol{\log x+1+\frac{1}{x}-2x} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} f'(1)&=\log 1+1+\frac{1}{1}-2\cdot 1\\ &=0+1+1-2=0 \end{aligned}$$

(2) $f''(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}-2$

これより

$$\begin{aligned} f''(1)&=\frac{1}{1}-\frac{1}{1}-2\\ &=1-1-2=-2<0 \end{aligned}$$

よって，$f(x)$ は $x=1$ で**極大値をとる.**

4. (1)
$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n-5}{n-2n^2}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}}{\frac{1}{n}-2}\\ &=\frac{1+0-0}{0-2}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって，数列は収束し，極限値は $\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$

(2)
$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n}\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1-n)\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\\ &=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって，数列は**収束**し，極限値は $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(3) $\dfrac{2^n}{\sqrt{3^n}}=\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$ より，この数列は等比数列であり，公比は，$\dfrac{2}{\sqrt{3}}>1$ であるから，この数列は ∞ **に発散する.**

(4) この数列は等比数列であり，公比は，$-1<\dfrac{2}{1+\sqrt{3}}<1$ であるから，この数列は**収束**し，極限値は $\mathbf{0}$

5. 与えられた等比級数の公比は，$-\dfrac{2}{3}$ であり，$-1 < -\dfrac{2}{3} < 1$ より，この級数は**収束**し，その和は

$$\frac{\frac{2}{3}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} = \boldsymbol{\frac{2}{5}}$$

6.（1） $f(x) = \sin\dfrac{x}{2}$ とすると，$f(0) = 0$

$f'(x) = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}$ より，$f'(0) = \dfrac{1}{2}$

$f''(x) = -\dfrac{1}{2^2}\sin\dfrac{x}{2}$ より，$f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\dfrac{1}{2^3}\cos\dfrac{x}{2}$ より，$f'''(0) = -\dfrac{1}{2^3}$

$f^{(4)}(x) = \dfrac{1}{2^4}\sin\dfrac{x}{2}$ より，$f^{(4)}(0) = 0$

よって

$f^{(2n)}(0) = 0$

$f^{(2n+1)}(0) = \dfrac{(-1)^n}{2^{2n+1}}$

したがって

$$\begin{aligned}\sin\frac{x}{2} &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{2^5}\cdot\frac{1}{5!}x^5 - \cdots \\ &\qquad \cdots + \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}\cdot\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}x - \frac{1}{3!\,2^3}x^3 + \frac{1}{5!\,2^5}x^5 - \cdots} \\ &\qquad \boldsymbol{\cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,2^{2n+1}}x^{2n+1} + \cdots}\end{aligned}$$

〔別解〕

$\sin x = x - \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{5!}x^5 - \cdots + \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots$ であるから

$$\begin{aligned}\sin\frac{x}{2} &= \frac{x}{2} - \frac{1}{3!}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{x}{2}\right)^5 - \cdots \\ &\qquad \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1} + \cdots \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}x - \frac{1}{3!\,2^3}x^3 + \frac{1}{5!\,2^5}x^5 - \cdots} \\ &\qquad \boldsymbol{\cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,2^{2n+1}}x^{2n+1} + \cdots}\end{aligned}$$

（2） $f(x) = \cos 2x$ とすると，$f(0) = 1$

$f'(x) = -2\sin 2x$ より，$f'(0) = 0$

$f''(x) = -2^2\cos 2x$ より，$f''(0) = -2^2$

$f'''(x) = 2^3\sin 2x$ より，$f'''(0) = 0$

$f^{(4)}(x) = 2^4\cos 2x$ より，$f^{(4)}(0) = 2^4$

よって

$f^{(2n)}(0) = (-1)^n\,2^{2n}$

$f^{(2n+1)}(0) = 0$

したがって

$$\begin{aligned}\cos 2x &= 1 - 2^2\cdot\frac{1}{2!}x^2 + 2^4\cdot\frac{1}{4!}x^4 - \cdots \\ &\qquad \cdots + (-1)^n\,2^{2n}\cdot\frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots \\ &= \boldsymbol{1 - \frac{2^2}{2!}x^2 + \frac{2^4}{4!}x^4 - \cdots} \\ &\qquad \boldsymbol{\cdots + (-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n)!}x^{2n} + \cdots}\end{aligned}$$

〔別解〕

$\cos x = 1 - \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{4!}x^4 - \cdots + \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$ であるから

$$\begin{aligned}\cos 2x &= 1 - \frac{1}{2!}(2x)^2 + \frac{1}{4!}(2x)^4 - \cdots \\ &\qquad \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n} + \cdots \\ &= \boldsymbol{1 - \frac{2^2}{2!}x^2 + \frac{2^4}{4!}x^4 - \cdots} \\ &\qquad \boldsymbol{\cdots + (-1)^n\frac{2^{2n}}{(2n)!}x^{2n} + \cdots}\end{aligned}$$

（3） $f(x) = e^{2x}$ とすると，$f(0) = 1$

$f'(x) = 2e^{2x}$ より，$f'(0) = 2$

$f''(x) = 2^2e^{2x}$ より，$f''(0) = 2^2$

$f'''(x) = 2^3e^{2x}$ より，$f'''(0) = 2^3$

よって

$f^{(n)}(0) = 2^n$

したがって

$$\begin{aligned}e^{2x} &= 1 + 2x + 2^2\cdot\frac{1}{2!}x^2 + 2^3\cdot\frac{1}{3!}x^3 + \cdots \\ &\qquad \cdots + 2^n\cdot\frac{1}{n!}x^n + \cdots \\ &= \boldsymbol{1 + 2x + \frac{2^2}{2!}x^2 + \frac{2^3}{3!}x^3 + \cdots} \\ &\qquad \boldsymbol{\cdots + \frac{2^n}{n!}x^n + \cdots}\end{aligned}$$

〔別解〕

$e^x = 1 + x + \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{3!}x^3 + \cdots + \dfrac{1}{n!}x^n + \cdots$ であるから

$$\begin{aligned}e^{2x} &= 1 + (2x) + \frac{1}{2!}(2x)^2 + \frac{1}{3!}(2x)^3 + \cdots \\ &\qquad \cdots + \frac{1}{n!}(2x)^n + \cdots \\ &= \boldsymbol{1 + 2x + \frac{2^2}{2!}x^2 + \frac{2^3}{3!}x^3 + \cdots} \\ &\qquad \boldsymbol{\cdots + \frac{2^n}{n!}x^n + \cdots}\end{aligned}$$

7. $y' = \lambda e^{\lambda x}$

$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

これらを，与えられた等式に代入すると

$\lambda^2 e^{\lambda x} + \lambda e^{\lambda x} + e^{\lambda x} = 0$

$e^{\lambda x}(\lambda^2 + \lambda + 1) = 0$

$e^{\lambda x} \neq 0$ であるから，$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$

これを解くと

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \boldsymbol{\frac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}}\end{aligned}$$

練習問題 1-B

1.（1）
$$\begin{aligned}f'(x) &= 1 - \{e^x\cos x + e^x\cdot(-\sin x)\} \\ &= 1 - e^x(\cos x - \sin x)\end{aligned}$$

これより，
$$\begin{aligned}f'(0) &= 1 - e^0(\cos 0 - \sin 0) \\ &= 1 - 1(1 - 0) = \boldsymbol{0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f''(x) &= -e^x(\cos x - \sin x) - e^x(-\sin x - \cos x) \\ &= 2e^x\sin x\end{aligned}$$

これより，$f''(0) = 2e^0\sin 0 = \boldsymbol{0}$

$$\begin{aligned}f'''(x) &= 2(e^x\sin x + e^x\cos x) \\ &= 2e^x(\sin x + \cos x)\end{aligned}$$

これより，$f'''(0)=2e^0(\sin 0+\cos 0)=\mathbf{2}$

（2）　$f(0)=0-e^0\cos 0=-1$ であるから，$f(x)$ の $x=0$ における 3 次近似式は

$$f(0)+f'(0)(x-0)+f\frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2+\frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3$$

$$=-1+0\cdot x+\frac{0}{2!}\cdot x^2+\frac{2}{3!}x^3$$

$$=-1+\frac{1}{3}x^3$$

よって，$\boldsymbol{f(x)=-1+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}$

（3）（2）より，$f(x)-f(0)=x^3\left(\frac{1}{3}+\frac{o(x^3)}{x^3}\right)$

$\lim_{x\to 0}\frac{o(x^3)}{x^3}=0$ であるから，x が 0 に十分近いとき，$f(x)-f(0)$ の符号は x^3 によって決まる．

$x<0$ のとき，$x^3<0$ であるから，$f(x)-f(0)<0$

$x>0$ のとき，$x^3>0$ であるから，$f(x)-f(0)>0$

よって，$f(x)$ は，$x=0$ で極値をとらない．

2.　x が a に十分近いとき

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots$$

$$\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o(x^n)$$

が成り立つ．

ここで，$f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$ であるから

$$f(x)-f(a)=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o(x^n)$$

$$=(x-a)^n\left\{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}+\frac{o(x^n)}{(x-a)^n}\right\}$$

$\lim_{x\to a}\frac{o(x^n)}{(x-a)^n}=0$ であるから，x が a に十分近ければ，$\left\{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}+\frac{o(x^n)}{(x-a)^n}\right\}$ の符号は，$\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ の符号で決まると考えてよい．

（1）n が奇数のとき

i）$f^{(n)}(a)>0$ のとき

$x<a$ すなわち，$x-a<0$ であれば，$(x-a)^n<0$ であるから

$$(x-a)^n\left\{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}+\frac{o(x^n)}{(x-a)^n}\right\}<0$$

すなわち，$f(x)-f(a)<0$

$x>a$ すなわち，$x-a>0$ であれば，$(x-a)^n>0$ であるから

$$(x-a)^n\left\{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}+\frac{o(x^n)}{(x-a)^n}\right\}>0$$

すなわち，$f(x)-f(a)>0$

したがって，$f(x)$ は $x=a$ で極値をとらない．

ii）$f^{(n)}(a)<0$ のとき

$x<a$ すなわち，$x-a<0$ であれば，$(x-a)^n<0$ であるから

$$(x-a)^n\left\{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}+\frac{o(x^n)}{(x-a)^n}\right\}>0$$

すなわち，$f(x)-f(a)>0$

$x>a$ すなわち，$x-a>0$ であれば，$(x-a)^n>0$ であるから

$$(x-a)^n\left\{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}+\frac{o(x^n)}{(x-a)^n}\right\}<0$$

すなわち，$f(x)-f(a)<0$

したがって，$f(x)$ は $x=a$ で極値をとらない．

以上より，n が奇数のときは，$f(x)$ は $x=a$ で極値をとらない．

（2）n が偶数のとき，$x=a$ の前後で，常に $(x-a)^n>0$

i）$f^{(n)}(a)>0$ のとき

$$(x-a)^n\left\{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}+\frac{o(x^n)}{(x-a)^n}\right\}>0$$

すなわち，$f(x)-f(a)>0$ であるから，$f(x)$ は $x=a$ で極小値をとる．

ii）$f^{(n)}(a)<0$ のとき

$$(x-a)^n\left\{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}+\frac{o(x^n)}{(x-a)^n}\right\}<0$$

すなわち，$f(x)-f(a)<0$ であるから，$f(x)$ は $x=a$ で極大値をとる．

3.（1）　$r>1$ のとき，$0<\frac{1}{r}<1$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2r^n}{r^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2r^n\cdot\frac{1}{r^n}}{(r^n+1)\cdot\frac{1}{r^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\left(\frac{1}{r}\right)^n}$$

$$=\frac{2}{1+0}=\mathbf{2}$$

（2）　$\lim_{n\to\infty}\frac{2r^n}{r^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 1^n}{1^n+1}$

$$=\frac{2}{1+1}=\frac{2}{2}=\mathbf{1}$$

（3）　$\lim_{n\to\infty}\frac{2r^n}{r^n+1}=\frac{2\cdot 0}{0+1}=\mathbf{0}$

（4）　$r<-1$ のとき，$-1<\frac{1}{r}<0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2r^n}{r^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2r^n\cdot\frac{1}{r^n}}{(r^n+1)\cdot\frac{1}{r^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{1+\left(\frac{1}{r}\right)^n}$$

$$=\frac{2}{1+0}=\mathbf{2}$$

4.　$\mathrm{A_1B_1}=a\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}a$

$\mathrm{B_1A_2}=\mathrm{A_1B_1}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\mathrm{A_2B_2}=\mathrm{B_1A_1}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}a\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$\mathrm{B_2A_3}=\mathrm{A_2B_2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}a\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

したがって

与式 $=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}a\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}a\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3+\cdots$

これは，初項 $\frac{1}{2}a$，公差 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ の無限等比級数であり，$\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|<1$ であるから収束し，その和は

$$\frac{\frac{1}{2}a}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{a}{2-\sqrt{3}}$$

$$=\frac{a(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{(2+\sqrt{3})a}{4-3}=\boldsymbol{(2+\sqrt{3})a}$$

5. $(\cos x + i\ \sin x)^3$ を展開すると

$$
\begin{aligned}
&(\cos x + i\ \sin x)^3 \\
&= \cos^3 x + 3\cos^2 x(i\sin x) + 3\cos x(i\sin x)^2 + (i\sin x)^3 \\
&= \cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x + 3\,i^2\cos x\sin^2 x + i^3\sin^3 x \\
&= \cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x - 3\cos x\sin^2 x - i\sin^3 x \\
&= (\cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x) + i\,(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x) \\
&= \{\cos^3 x - 3\cos x(1-\cos^2 x)\} \\
&\qquad\qquad + i\,\{3(1-\sin^2 x)\sin x - \sin^3 x\} \\
&= (\cos^3 x - 3\cos x + 3\cos^2 x) \\
&\qquad\qquad + i\,(3\sin x - 3\sin^3 x - \sin^3 x) \\
&= (4\cos^3 x - 3\cos x) + i\,(3\sin x - 4\sin^3 x) \quad \cdots ①
\end{aligned}
$$

一方，ド・モアブルの定理より

$$(\cos x + i\ \sin x)^3 = \cos 3x + i\ \sin 3x$$

この式の右辺と ① の実部，虚部を比較して

$$\begin{cases} \boldsymbol{\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x} \\ \boldsymbol{\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x} \end{cases}$$

∎