1章　関数の展開

問 1

（1）　$f'(x) = \cos x$

これより，$x = 0$ における 1 次近似式は

$$f(0) + f'(0)(x-0) = \sin 0 + \cos 0 \cdot x$$
$$= 0 + 1 \cdot x = x$$

よって，$\boldsymbol{\sin x \fallingdotseq x}$

（2）　$f'(x) = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

これより，$x = 1$ における 1 次近似式は

$$f(1) + f'(1)(x-1) = \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}} \cdot (x-1)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x$$

よって，$\boldsymbol{\sqrt{x} \fallingdotseq \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}x}$

問 2

（1）　$f'(x) = -e^{-x}$

$f''(x) = -(-e^{-x}) = e^{-x}$

よって，$x = 0$ における 2 次近似式は

$$f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{1}{2}f''(0)(x-0)^2$$
$$= e^0 - e^0 \cdot x + \frac{1}{2}e^0 \cdot x^2$$
$$= 1 - x + \frac{1}{2}x^2$$

したがって

$$\boldsymbol{e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + \varepsilon_2} \qquad \text{ただし，} \lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon_2}{x^2} = 0$$

（2）　$f'(x) = (1-x)^{-2} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

$f''(x) = (1-x)^{-3} = \dfrac{2}{(1-x)^3}$

よって，$x = 0$ における 2 次近似式は

$$f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{1}{2}f''(0)(x-0)^2$$
$$= \frac{1}{1-0} + \frac{1}{(1-0)^2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(1-0)^{\,3}} \cdot x^2$$
$$= 1 + x + x^2$$

したがって

$$\boldsymbol{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \varepsilon_2} \qquad \text{ただし，} \lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon_2}{x^2} = 0$$

（3）　$f'(x) = -\sin x$

$f''(x) = -\cos x$

よって，$x = 0$ における 2 次近似式は

$$f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{1}{2}f''(0)(x-0)^2$$
$$= \cos 0 - \sin 0 \cdot x - \frac{1}{2} \cdot \cos 0 \cdot x^2$$
$$= 1 - \frac{1}{2}x^2$$

したがって

$$\boldsymbol{\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \varepsilon_2} \qquad \text{ただし，} \lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon_2}{x^2} = 0$$

問 3

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$
$$f''(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$$

よって，$x = 1$ における 2 次近似式は

$$f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2$$
$$= \sqrt[3]{1} + \frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}}(x-1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9 \cdot 1\sqrt[3]{1^2}}(x-1)^2$$
$$= 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2$$

これを利用して

$$\sqrt[3]{1.1} \fallingdotseq 1 + \frac{1}{3}(1.1-1) - \frac{1}{9}(1.1-1)^2$$
$$= 1 + \frac{1}{3} \cdot 0.1 - \frac{1}{9} \cdot 0.01$$
$$= \frac{9 + 0.3 - 0.01}{9}$$
$$= \frac{9.29}{9}$$
$$= 1.0322\cdots$$

よって，**1.032**

問 4

例題 1 より，e^x の 4 次近似式は

$$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4$$

これを利用して

$$e^{0.2} \fallingdotseq 1 + 0.2 + \frac{1}{2!}(0.2)^2 + \frac{1}{3!}(0.2)^3 + \frac{1}{4!}(0.2)^4$$
$$= 1.2 + \frac{0.04}{2} + \frac{0.008}{6} + \frac{0.0016}{24}$$
$$= \frac{1.2 \cdot 24 + 0.04 \cdot 12 + 0.008 \cdot 4 + 0.0016}{24}$$
$$= \frac{28.8 + 0.48 + 0.032 + 0.0016}{24}$$
$$= \frac{29.3136}{24}$$
$$= 1.2214$$

よって，**1.2214**

$$e = (e^{0.2})^5$$
$$\fallingdotseq 1.2214^5 = 2.71825\cdots$$

よって，**2.718**

問 5

（1）　$f(x) = \sin x$ とおくと

$f'(x) = \cos x$，$f''(x) = -\sin x$，$f'''(x) = -\cos x$，

$f^{(4)}(x) = \sin x$，$f^{(5)}(x) = \cos x$，$f^{(6)}(x) = -\sin x$，

$f^{(7)}(x) = -\cos x$

ここで，$f(0) = f''(0) = f^{(4)}(0) = f^{(6)}(0) = 0$

$f'(0) = f^{(5)}(0) = 1$

$f'''(0) = f^{(7)}(0) = -1$

したがって，$f(x)$ の $x = 0$ のおける 7 次近似式は

$$f'(0)x + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \frac{f^{(7)}(0)}{7!}x^7$$
$$= 1 \cdot x + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{-1}{7!}x^7$$
$$= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7$$

よって，$\sin x = x - \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{5!}x^5 - \dfrac{1}{7!}x^7 + o(x^7)$

（2）　$f(x) = \cos x$ とおくと

$f'(x) = -\sin x$，$f''(x) = -\cos x$，$f'''(x) = \sin x$，

$f^{(4)}(x) = \cos x$，$f^{(5)}(x) = -\sin x$，$f^{(6)}(x) = -\cos x$，

ここで，$f'(0)=f'''(0)=f^{(5)}(0)=0$

$f(0)=f^{(4)}(0)=1$

$f''(0)=f^{(6)}(0)=-1$

したがって，$f(x)$ の $x=0$ のおける 6 次近似式は

$$f(0)+\frac{f''(0)}{2\,!}x^2+\frac{f^{(4)}(0)}{4\,!}x^4+\frac{f^{(6)}(0)}{6\,!}x^6$$
$$=1+\frac{-1}{2\,!}x^2+\frac{1}{4\,!}x^4+\frac{-1}{6\,!}x^6$$
$$=1-\frac{1}{2\,!}x^2+\frac{1}{4\,!}x^4-\frac{1}{6\,!}x^6$$

よって，$\cos x=1-\dfrac{1}{2\,!}x^2+\dfrac{1}{4\,!}x^4-\dfrac{1}{6\,!}x^6+o(x^6)$

問 6

$f(x)=\log(1+x)$ とおくと

$f(0)=\log 1=0$

$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$ より，$f'(0)=1$

$f''(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$ より，$f''(0)=-1$

$f'''(x)=\dfrac{2}{(1+x)^3}$ より，$f'''(0)=2\,!$

$f^{(4)}(x)=-\dfrac{3\cdot 2}{(1+x)^4}$ より，$f^{(4)}(0)=-3\,!$

$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{(n-1)\,!}{(1+x)^n}$ より，（この式の証明は略）

$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)\,!$

したがって，$f(x)$ の $x=0$ における n 次近似式は

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2\,!}x^2+\frac{f'''(0)}{3\,!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}x^n$$
$$=0+1\cdot x+(-1)\cdot\frac{1}{2\,!}x^2+2\,!\cdot\frac{1}{3\,!}x^3+\cdots$$
$$\cdots+(-1)^{n-1}(n-1)\,!\cdot\frac{1}{n\,!}x^n$$
$$=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n$$

よって

$$\log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+o(x^n)$$

問 7

（1）　$f'(x)=\boldsymbol{e^x-\cos x}$

これより

$f'(0)=e^0-\cos 0$

$=1-1=0$

（2）　$f''(x)=e^x+\sin x$

これより

$f''(0)=e^0+\sin 0$

$=1+0=1>0$

よって，$f(x)$ は，$x=0$ で**極小値をとる．**

問 8

（1）　$f'(x)=1-2\sin x$

これより

$1-2\sin x=0$

これを解いて

$\sin x=\dfrac{1}{2}$

$0\leqq x\leqq\pi$ より，$\boldsymbol{x=\dfrac{\pi}{6},\ \ \dfrac{5}{6}\pi}$

（2）　$f''(x)=-2\cos x$ であるから

$x=\dfrac{\pi}{6}$ のとき

$f''\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-2\cos\dfrac{\pi}{6}$

$=-2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}<0$

このとき

$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\pi}{6}+2\cos\dfrac{\pi}{6}$

$=\dfrac{\pi}{6}+2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}$

よって，$f(x)$ は，$\boldsymbol{x=\dfrac{\pi}{6}}$ のとき，**極大値 $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}}$ をとる．**

$x=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき

$f''\left(\dfrac{5}{6}\pi\right)=-2\cos\dfrac{5}{6}\pi$

$=-2\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{3}>0$

このとき

$f\left(\dfrac{5}{6}\pi\right)=\dfrac{5}{6}\pi+2\cos\dfrac{5}{6}\pi$

$=\dfrac{5}{6}\pi+2\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$

よって，$f(x)$ は，$\boldsymbol{x=\dfrac{5}{6}\pi}$ のとき，**極小値 $\boldsymbol{\dfrac{5}{6}\pi-\sqrt{3}}$ をとる．**

問 9

（1）　与式 $=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(3n-5)\cdot\frac{1}{n}}{(2n+1)\cdot\frac{1}{n}}$

$=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{5}{n}}{2+\frac{1}{n}}$

$=\dfrac{3-0}{2+0}=\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

（2）　与式 $=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n-2)\cdot\frac{1}{n^2}}{(2n^2+1)\cdot\frac{1}{n^2}}$

$=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}}$

$=\dfrac{0-0}{2+0}=\boldsymbol{0}$

（3）　与式 $=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1}}$

$=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)-(n-1)}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1}}$

$=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1}}=\boldsymbol{0}$

（分母 $\to\infty$，分子 $\to 4$）

または

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}}{(\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1})\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$$
$$=\frac{0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=\boldsymbol{0}$$

（4）　与式 $= \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{4n^2+3n}-2n)(\sqrt{4n^2+3n}+2n)}{\sqrt{4n^2+3n}+2n}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(4n^2+3n)-(2n)^2}{\sqrt{4n^2+3n}+2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{4n^2+3n}+2n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3n\cdot\frac{1}{n}}{(\sqrt{4n^2+3n}+2n)\cdot\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{(4n^2+3n)\cdot\frac{1}{n^2}}+2n\cdot\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{4+\frac{3}{n}}+2}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{4+0}+2} = \mathbf{\frac{3}{4}}$$

問 10　それぞれの等比数列の公比を r とする．

（1）　$r = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} > 1$

よって，この等比数列は，**∞ に発散する．**

（2）　$r = \dfrac{1}{1-\sqrt{2}}$

$$= \frac{1+\sqrt{2}}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}$$

$$= -(1+\sqrt{2}) < -1$$

よって，この等比数列は，**発散する．（振動する．）**

（3）　$\left\{\dfrac{4^n}{7^n}\right\} = \left\{\left(\dfrac{4}{7}\right)^n\right\}$ であるから，$r = \dfrac{4}{7}$

$-1 < r < 1$ より，この等比数列は，**0 に収束する．**

問 11

第 n 部分和を S_n とすると

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots$$

$$\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$$= 1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1$

したがって，この級数は**収束**し，その和は **1**

問 12

与えられた級数において，$a_n = \dfrac{n}{2n+1}$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2} \fallingdotseq 0$$

よって，この級数は発散する．

問 13　それぞれの等比級数の公比を r とする．

（1）　$r = \dfrac{1}{3}$ より，$|r| < 1$ であるから，この等比級数は収束し，その和は

$$\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \mathbf{\frac{3}{2}}$$

（2）　$r = -\dfrac{1}{2}$ より，$|r| < 1$ であるから，この等比級数は収束し，その和は

$$\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

（3）　$r = \tan\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3} > 1$ であるから，この等比級数は**発散する．**

（4）　$r = 0.1$ より，$|r| < 1$ であるから，この等比級数は収束し，その和は

$$\frac{0.3}{1-0.1} = \frac{0.3}{0.9} = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

問 14

点 P の座標は

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\cdots$$

$$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\cdots$$

より，初項 1，公比 $-\dfrac{1}{3}$ の等比級数の和になるから

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}+\cdots = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}$$

$$= \frac{1}{\frac{4}{3}} = \mathbf{\frac{3}{4}}$$

問 15

与えられたべき級数は，公比 $\dfrac{1}{2}x$ の等比級数だから，$\left|\dfrac{1}{2}x\right| < 1$ のとき，すなわち，$\boldsymbol{|x| < 2}$ のときに限り収束し，その和は

$$1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{6}x^3+\cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}x}$$

$$= \boldsymbol{\frac{2}{2-x}}$$

問 16

$f(0) = \dfrac{1}{3}$

$f'(x) = -(3+x)^{-2}$ より，$f'(0) = -3^{-2} = -\dfrac{1}{3^2}$

$f''(x) = 2!\,(3+x)^{-3}$ より，$f''(0) = 2!\cdot 3^{-3} = \dfrac{2!}{3^3}$

$f'''(x) = -3!\,(3+x)^{-4}$ より，$f'''(0) = -3!\cdot 3^{-4} = -\dfrac{3!}{3^4}$

$f^{(4)}(x) = 4!\,(3+x)^{-5}$ より，$f^{(4)}(0) = 4!\cdot 3^{-5} = \dfrac{4!}{3^5}$

$\cdots$

$f^{(n)}(x) = (-1)^n n!\,(3+x)^{-n}$ より，（この式の証明は略）

$$f^{(n)}(0) = (-1)^n\cdot n!\cdot 3^{-(n+1)} = (-1)^n\frac{n!}{3^{n+1}}$$

$f(x)$ の n 次近似式を $P_n(x)$ とおくと

$$P_n(x) = \frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}x+\frac{2!}{3^3}\cdot\frac{1}{2!}x^2-\frac{3!}{3^4}\cdot\frac{1}{3!}x^3+\cdots$$

$$\cdots+(-1)^n\frac{n!}{3^{n+1}}\cdot\frac{1}{n!}x^n$$

$$= \frac{1}{3}-\frac{1}{3^2}x+\frac{1}{3^3}x^2-\frac{1}{3^4}x^3+\cdots+(-1)^n\frac{1}{3^{n+1}}x^n$$

これは，初項 $\dfrac{1}{3}$，公比 $-\dfrac{1}{3}x$，項数 $n+1$ の等比数列の和であるから

$$P_n(x) = \frac{\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}x\right)^{n+1}\right\}}{1+\frac{1}{3}x} = \frac{1-\left(-\frac{1}{3}x\right)^{n+1}}{3+x}$$

これから

$$f(x)-P_n(x)=\frac{1}{3+x}-\frac{1-\left(-\frac{1}{3}x\right)^{n+1}}{3+x}$$
$$=\frac{\left(-\frac{1}{3}x\right)^{n+1}}{3+x}$$

$\left|-\frac{1}{3}x\right|<1$ すなわち，$|x|<3$ のとき，$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3}x\right)^{n+1}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\{f(x)-P_n(x)\}=0$$

が成り立つ．よって，$f(x)$ のマクローリン展開は

$$\boldsymbol{\frac{1}{3+x}=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}x+\frac{1}{27}x^2-\cdots+(-1)^n\frac{1}{3^{n+1}}x^n+\cdots}$$
$$(|x|<3)$$

問 17

（1） 左辺 $=e^{i(-x)}$

$$=\cos(-x)+i\,\sin(-x)$$
$$=\cos x+i\,(-\sin x)$$
$$=\cos x-i\,\sin x=\text{右辺}$$

（2） 第 1 式について

$$\text{左辺}=\frac{1}{2}\{(\cos x+i\,\sin x)+(\cos x-i\,\sin x)\}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cos x$$
$$=\cos x=\text{右辺}$$

第 2 式について

$$\text{左辺}=\frac{1}{2i}\{(\cos x+i\,\sin x)-(\cos x-i\,\sin x)\}$$
$$=\frac{1}{2i}\cdot 2i\sin x$$
$$=\sin x=\text{右辺}$$

問 18

（1） $(e^{ix})'=\boldsymbol{i\,e^{ix}}$

（2） $(e^{(3-2\,i)x})'=\boldsymbol{(3-2\,i)e^{(3-2\,i)x}}$

（3） $(e^{ix}+e^{-ix})'=ie^{ix}+(-i)e^{-ix}$

$$=ie^{ix}-ie^{-ix}$$
$$=\boldsymbol{i(e^{ix}-e^{-ix})}$$

（4） $\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2\,i}\right)'=\frac{1}{2\,i}(e^{ix}-e^{-ix})'$

$$=\frac{1}{2\,i}\{ie^{ix}-(-i)e^{-ix}\}$$
$$=\frac{1}{2\,i}(ie^{ix}+ie^{-ix})$$
$$=\boldsymbol{\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}}$$

■