3章　積分法

練習問題 2-A

1.　※ 積分定数 C は省略

（1）　与式 $= \displaystyle\int \frac{1}{2}\cdot\frac{(u^2+3)'}{u^2+3}\,du$

$= \dfrac{1}{2}\log|u^2+3|$

$= \boldsymbol{\dfrac{1}{2}\log(u^2+3)}$

（2）　$4-x^2=t$ とおくと，$-2xdx=dt$ より，$x\,dx=-\dfrac{1}{2}\,dt$

よって

与式 $= \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{t}}\left(-\frac{1}{2}\,dt\right)$

$= -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt$

$= -\dfrac{1}{2}\cdot 2t^{\frac{1}{2}}$

$= \boldsymbol{-\sqrt{4-x^2}}$

（3）　$\sin x=t$ とおくと，$\cos x\,dx=dt$

よって

与式 $= \displaystyle\int (1-t^3)\,dt$

$= t-\dfrac{1}{4}t^4$

$= \boldsymbol{\sin x-\dfrac{1}{4}\sin^4 x}$

（4）　$\log t=u$ とおくと，$\dfrac{1}{t}\,dt=du$

よって

与式 $= \displaystyle\int u^2\,du$

$= \dfrac{1}{3}t^3$

$= \boldsymbol{\dfrac{1}{3}(\log t)^3}$

（5）　与式 $= (3x+1)\cdot\dfrac{1}{2}\sin 2x-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int(3x+1)'\cdot\sin 2x\,dx$

$= \dfrac{1}{2}(3x+1)\sin 2x-\dfrac{3}{2}\displaystyle\int \sin 2x\,dx$

$= \dfrac{1}{2}(3x+1)\sin 2x-\dfrac{3}{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\cos 2x\right)$

$= \boldsymbol{\dfrac{1}{2}(3x+1)\sin 2x+\dfrac{3}{4}\cos 2x}$

（6）　与式 $= x^2\cdot\dfrac{1}{3}e^{3x}-\dfrac{1}{3}\displaystyle\int (x^2)'e^{3x}\,dx$

$= \dfrac{1}{3}x^2e^{3x}-\dfrac{2}{3}\displaystyle\int xe^{3x}\,dx$

$= \dfrac{1}{3}x^2e^{3x}-\dfrac{2}{3}\left(x\cdot\dfrac{1}{3}e^{3x}-\dfrac{1}{3}\displaystyle\int x'e^{3x}\,dx\right)$

$= \dfrac{1}{3}x^2e^{3x}-\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{3}xe^{3x}-\dfrac{1}{3}\displaystyle\int e^{3x}\,dx\right)$

$= \dfrac{1}{3}x^2e^{3x}-\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{3}xe^{3x}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}e^{3x}\right)$

$= \dfrac{1}{3}x^2e^{3x}-\dfrac{2}{9}xe^{3x}+\dfrac{2}{27}e^{3x}$

$= \boldsymbol{\dfrac{1}{27}(9x^2-6x+2)e^{3x}}$

2.（1）　与式 $= \displaystyle\int \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx$

$= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int (1-\cos 2x)\,dx$

$= \dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{2}\sin 2x\right)$

$= \boldsymbol{\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}\sin 2x}$

（2）　与式 $= \displaystyle\int \sin^2 x\cdot\sin x\,dx$

$= \displaystyle\int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx$

$\cos x=t$ とおくと，$-\sin xdx=dt$ より，$\sin xdx=-dt$

よって

与式 $= \displaystyle\int (1-t^2)\cdot(-dt)$

$= \displaystyle\int (t^2-1)\,dt$

$= \dfrac{1}{3}t^3-t$

$= \boldsymbol{\dfrac{1}{3}\cos^3 x-\cos x}$

3.（1）　$e^x-e^{-x}=t$ とおくと，$(e^x+e^{-x})dx=dt$

また，x と t の対応は

x	-1	$\to$	1
t	$\frac{1}{e}-e$	$\to$	$e-\frac{1}{e}$

よって

与式 $= \displaystyle\int_{-(e-\frac{1}{e})}^{e-\frac{1}{e}} t^2\,dt$

$= 2\displaystyle\int_0^{e-\frac{1}{e}} t^2\,dt$

$= 2\left[\dfrac{1}{3}t^3\right]_0^{e-\frac{1}{e}} = \boldsymbol{\dfrac{2}{3}\left(e-\dfrac{1}{e}\right)^3}$

（2）　与式 $= \left[(\log x)^2\cdot\dfrac{1}{2}x^2\right]_1^e-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^e x^2\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}\,dx$

$= \dfrac{1}{2}e^2-\displaystyle\int_1^e x\log x\,dx$

$= \dfrac{1}{2}e^2-\left(\left[\log x\cdot\dfrac{1}{2}x^2\right]_1^e-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^e x^2\cdot\frac{1}{x}\,dx\right)$

$= \dfrac{1}{2}e^2-\dfrac{1}{2}e^2+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^e x\,dx$

$= \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2}x^2\right]_1^e = \boldsymbol{\dfrac{1}{4}(e^2-1)}$

（3）　与式 $= \left[x^3e^x\right]_0^1-\displaystyle\int_0^1 3x^2e^x\,dx$

$= e-3\displaystyle\int_0^1 x^2e^x\,dx$

$= e-3\left(\left[x^2e^x\right]_0^1-\displaystyle\int_0^1 2xe^x\,dx\right)$

$= e-3e+6\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx$

$= -2e+6\left(\left[xe^x\right]_0^1-\displaystyle\int_0^1 e^x\,dx\right)$

$= -2e+6e-6\left[e^x\right]_0^1$

$= -2e+6e-6(e-1) = \boldsymbol{6-2e}$

（4）　与式 $= \displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx + \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

ここで

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \left[\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^{\sqrt{2}}$$
$$= \sin^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin^{-1}0$$
$$= \frac{\pi}{4}$$

また，$\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ において，$4-x^2=t$ とおくと，$-2x\,dx = dt$ より，$2x\,dx = -dt$

x と t の対応は

x	$0 \to \sqrt{2}$
t	$4 \to 2$

よって

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int_4^2 \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot(-dt)$$
$$= \int_2^4 t^{-\frac{1}{2}}\,dt$$
$$= \left[2t^{\frac{1}{2}}\right]_2^4$$
$$= 2(\sqrt{4}-\sqrt{2}) = 4-2\sqrt{2}$$

以上より，与式 $= \boldsymbol{\dfrac{\pi}{4} + 4 - 2\sqrt{2}}$

4.　$x-2=t$ より，$dx=dt$

また，x と t の対応は

x	$0 \to 4$
t	$-2 \to 2$

よって

$$与式 = \int_0^4 \frac{dx}{(x-2)^2-4+8}$$
$$= \int_0^4 \frac{dx}{(x-2)^2+4}$$
$$= \int_{-2}^2 \frac{dt}{t^2+4}$$
$$= 2\int_0^2 \frac{dt}{t^2+4}$$
$$= 2\left[\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{t}{2}\right]_0^2$$
$$= \tan^{-1}1 - \tan^{-1}0 = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$

5.（1）　$x = a\sin\theta$ より，$dx = a\cos\theta d\theta$

また，x と θ の対応は

x	$0 \to \frac{a}{2}$
t	$0 \to \frac{\pi}{6}$

よって

$$与式 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{a\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}}$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{a\cos\theta}{\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}}\,d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{a\cos\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta}}\,d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{a\cos\theta}{|a\cos\theta|}\,d\theta$$

$a>0$，また，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{6}$ においては，$\cos\theta > 0$ であるから，$a\cos > 0$

したがって

$$与式 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{a\cos\theta}{a\cos\theta}\,d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta$$
$$= \Big[\,\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$$

（2）　$x = a\sin\theta$ より，$dx = a\cos\theta d\theta$

また，x と θ の対応は

x	$0 \to a$
t	$0 \to \frac{\pi}{2}$

よって

$$与式 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(a^2-a^2\sin^2\theta)^3}\cdot a\cos\theta\,d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\{a^2(1-\sin^2\theta)\}^3}\cdot a\cos\theta\,d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(a^2\cos^2\theta)^3}\cdot a\cos\theta\,d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(a^3\cos^3\theta)^2}\cdot a\cos\theta\,d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |a^3\cos^3\theta|\cdot a\cos\theta\,d\theta$$

$a>0$，また，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ においては，$\cos\theta \geqq 0$ であるから，$a\cos \geqq 0$，すなわち $a^3\cos^3\theta \geqq 0$ であるから

$$与式 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3\cos^3\theta\cdot a\cos\theta\,d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^4\cos^4\theta\,d\theta$$
$$= a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\,d\theta$$
$$= a^4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \boldsymbol{\frac{3}{16}\pi a^4}$$

6.　※ まず，被積分関数が偶関数であることを確認します．

$f(x) = \cos mx\,\cos nx$ とおくと

$$f(-x) = \cos m(-x)\,\cos n(-x)$$
$$= \cos(-mx)\,\cos(-nx)$$
$$= \cos mx\,\cos nx = f(x)$$

よって，$f(x)$ は偶関数である．

$$与式 = 2\int_0^{\pi} \cos mx\cos nx\,dx$$
$$= 2\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\{\cos(mx+nx)+\cos(mx-nx)\}\,dx$$
$$= \int_0^{\pi} \{\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\}\,dx \quad \cdots①$$

i）$m \fallingdotseq n$ のとき，①より

$$与式 = \int_0^{\pi} \{\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\}\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x + \frac{1}{m-n}\sin(m-n)x\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{1}{m+n}\sin(m+n)\pi + \frac{1}{m-n}\sin(m-n)\pi - \left(\frac{1}{m+n}\sin 0 + \frac{1}{m-n}\sin 0\right)$$
$$= \boldsymbol{0}$$

ii）$m = n$ のとき，①より

$$\begin{aligned}
与式 &= \int_0^{\pi} \{\cos 2mx + \cos 0x\}\, dx \\
&= \int_0^{\pi} (\cos 2mx + 1)\, dx \\
&= \left[\frac{1}{2m}\sin 2mx + x\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{2m}\sin 2m\pi + \pi - \left(\frac{1}{2m}\sin 0 + 0\right) \\
&= \boldsymbol{\pi}
\end{aligned}$$

以上より，$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi & (m = n) \end{cases}$

練習問題 2-B

1. （1）

$$\begin{aligned}
与式 &= \int 1 \cdot \tan^{-1} x\, dx \quad （部分積分） \\
&= x\tan^{-1} x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2}\, dx \\
&= x\tan^{-1} x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx \\
&= x\tan^{-1} x - \int \frac{1}{2}\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}\, dx \\
&= x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\log|1+x^2| \\
&= \boldsymbol{x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\log(x^2+1)}
\end{aligned}$$

（2）

$$\begin{aligned}
与式 &= \int 1 \cdot \sin^{-1} x\, dx \quad （部分積分） \\
&= x\sin^{-1} x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \\
&= x\sin^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx
\end{aligned}$$

ここで，$\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ において，$1-x^2 = t$ とおくと，$-2x\, dx = dt$ より，$x\, dx = -\frac{1}{2}\, dt$ であるから

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx &= \int \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \left(-\frac{1}{2}dt\right) \\
&= -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\, dt \\
&= -\frac{1}{2} \cdot 2t^{\frac{1}{2}} \\
&= -\sqrt{t} = -\sqrt{1-x^2}
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
与式 &= x\sin^{-1} x - (-\sqrt{1-x^2}) \\
&= \boldsymbol{x\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

（3）

$$\begin{aligned}
与式 &= \int \frac{(2x+2)+1}{x^2+2x+2}\, dx \\
&= \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\, dx + \int \frac{1}{x^2+2x+2}\, dx \\
&= \int \frac{(x^2+2x+2)'}{x^2+2x+2}\, dx + \int \frac{1}{(x+1)^2-1+2}\, dx \\
&= \log|x^2+2x+2| + \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\, dx
\end{aligned}$$

$\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)^2+1}\, dx$ において，$x+1 = t$ とおくと，$dx = dt$ であるから

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x+1)^2+1}\, dx &= \int \frac{1}{t^2+1}\, dt \\
&= \tan^{-1} t = \tan^{-1}(x+1)
\end{aligned}$$

また，$x^2+2x+2 = (x+1)^2+1 > 0$ であるから，

$$与式 = \boldsymbol{\log(x^2+2x+2) + \tan^{-1}(x+1)}$$

（4）

$$\begin{aligned}
与式 &= \frac{1}{2}x^2\log(x+1) - \int \frac{1}{2}x^2\{\log(x+1)\}'\, dx \\
&= \frac{1}{2}x^2\log(x+1) - \frac{1}{2}\int x^2 \cdot \frac{1}{x+1}\, dx \\
&= \frac{1}{2}x^2\log(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x+1}\, dx \quad \cdots ①
\end{aligned}$$

$\displaystyle\int \frac{x^2}{x+1}\, dx$ において，被積分関数の分子を分母で割ると

$$\begin{array}{r}
x\ -1 \\
x+1\,\big)\,\overline{x^2\qquad} \\
\underline{x^2\ +x} \\
-x \\
\underline{-x\ -1} \\
1
\end{array}$$

よって

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{x+1}\, dx &= \int \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right) dx \\
&= \frac{1}{2}x^2 - x + \log|x+1|
\end{aligned}$$

$\log(x+1)$ の真数条件より，$x+1>0$ なので

$$= \frac{1}{2}x^2 - x + \log(x+1)$$

これを①に代入して

$$\begin{aligned}
与式 &= \frac{1}{2}x^2\log(x+1) - \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}x^2 - x + \log(x+1)\right\} \\
&= \frac{1}{2}x^2\log(x+1) - \frac{1}{2}\log(x+1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{2}(x^2-1)\log(x+1) - \frac{1}{4}x(x-2)}
\end{aligned}$$

2. （1） $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$ より，$1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$ なので

$$\begin{aligned}
与式 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} \sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}\, dx \\
&= \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} \left|\cos\frac{x}{2}\right| dx
\end{aligned}$$

ここで，$\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{2}{3}\pi$ のとき，$\frac{\pi}{4} \leqq \frac{x}{2} \leqq \frac{\pi}{3}$ であるから，$\cos\frac{x}{2} \geqq 0$

よって

$$\begin{aligned}
与式 &= \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} \cos\frac{x}{2}\, dx \\
&= \sqrt{2}\left[2\sin\frac{x}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} \\
&= 2\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4}\right) \\
&= 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= \boldsymbol{\sqrt{6} - 2}
\end{aligned}$$

（2） $1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ より，$\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$

$$\begin{aligned}
与式 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot \tan^2 x\, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x}\right)\sin x\, dx
\end{aligned}$$

$\cos x = t$ とおくと，$-\sin x\, dx = dt$ より，$\sin x\, dx = -dt$

また，x と t の対応は

x	$0 \to \frac{\pi}{4}$
t	$1 \to \frac{1}{\sqrt{2}}$

よって

$$\begin{aligned}
与式 &= \int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{t^3} - \frac{1}{t}\right)(-dt) \\
&= \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \left(\frac{1}{t^3} - \frac{1}{t}\right) dt \\
&= \left[-\frac{1}{2t^2} - \log|t|\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \\
&= -\frac{1}{2} - \log 1 - \left(-1 - \log\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= -\frac{1}{2} + 0 + 1 + \log 2^{-\frac{1}{2}} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log 2}
\end{aligned}$$

3. （1） 右辺 $= \dfrac{a(x-1)^3 + bx(x-1)^2 + cx(x-1) + dx}{x(x-1)^3}$

$$\begin{aligned}
分子 &= a(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + bx(x^2 - 2x + 1) \\
&\qquad + cx^2 - cx + dx \\
&= ax^3 - 3ax^2 + 3ax - a + bx^3 - 2bx^2 + bx \\
&\qquad + cx^2 - cx + dx \\
&= (a+b)x^3 + (-3a - 2b + c)x^2 \\
&\qquad + (3a + b - c + d)x - a
\end{aligned}$$

これが左辺の分子と一致するので

$$\begin{cases} a + b = 0 & \cdots ① \\ -3a - 2b + c = 3 & \cdots ② \\ 3a + b - c + d = 0 & \cdots ③ \\ -a = 1 & \cdots ④ \end{cases}$$

④より，$a = -1$

これを①に代入して

$-1 + b = 0$ より，$b = 1$

②に代入して

$3 - 2 + c = 3$ より，$c = 2$

③に代入して

$-3 + 1 - 2 + d = 0$ より，$d = 4$

以上より，$\boldsymbol{a = -1,\ b = 1,\ c = 2,\ d = 4}$

（2） （1）を利用して

$$\begin{aligned}
与式 &= \int \left\{-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{4}{(x-1)^3}\right\} dx \\
&= -\log|x| + \log|x-1| \\
&\qquad + 2\cdot\{-(x-1)^{-1}\} + 4\cdot\left\{-\frac{1}{2}(x-1)^{-2}\right\} \\
&= \log\frac{|x-1|}{|x|} - \frac{2}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2} \\
&= \log\left|\frac{x-1}{x}\right| - \left\{\frac{2(x-1)}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^2}\right\} \\
&= \boldsymbol{\log\left|\frac{x-1}{x}\right| - \frac{2x}{(x-1)^2}}
\end{aligned}$$

4. $x = a\tan\theta$ より，$dx = \dfrac{a}{\cos^2\theta}\, d\theta$

（1） x と θ の対応は

x	$0 \to \sqrt{3}a$
θ	$0 \to \frac{\pi}{3}$

よって

$$\begin{aligned}
与式 &= \int_0^{\sqrt{3}a} \frac{1}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{(a^2\tan^2\theta + a^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{a}{\cos^2\theta}\, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\{a^2(\tan^2\theta + 1)\}^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{a}{\cos^2\theta}\, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{a^3} \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{a}{\cos^2\theta}\, d\theta \\
&= \frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}\, d\theta \\
&= \frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3\theta \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}\, d\theta \\
&= \frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\theta\, d\theta \\
&= \frac{1}{a^2}\Big[\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{1}{a^2}\cdot\sin\frac{\pi}{3} \\
&= \frac{1}{a^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2a^2}}
\end{aligned}$$

（2） x と θ の対応は

x	$0 \to \sqrt{a}$
θ	$0 \to \frac{\pi}{4}$

よって

$$\begin{aligned}
与式 &= \int_0^{\sqrt{3}a} \frac{1}{(x^2 + a^2)^2}\, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(a^2\tan^2\theta + a^2)^2} \cdot \frac{a}{\cos^2\theta}\, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\{a^2(\tan^2\theta + 1)\}^2} \cdot \frac{a}{\cos^2\theta}\, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{a^4} \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)^2} \cdot \frac{a}{\cos^2\theta}\, d\theta \\
&= \frac{1}{a^3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2\theta)^2 \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}\, d\theta \\
&= \frac{1}{a^3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4\theta \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}\, d\theta \\
&= \frac{1}{a^3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\, d\theta \\
&= \frac{1}{a^3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\, d\theta \\
&= \frac{1}{2a^3}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{1}{2a^3}\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} - (0 + 0)\right\} \\
&= \frac{1}{2a^3}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2a^3}\cdot\frac{\pi + 2}{4} = \boldsymbol{\frac{\pi + 2}{8a^3}}
\end{aligned}$$

5. （1） $\sin(\pi - x) = \sin x$ より

$$左辺 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^n(\pi - x)\, dx$$

$\pi - x = t$ とおくと，$-dx = dt$ より，$dx = -dt$

また，x と t の対応は

x	$\frac{\pi}{2} \to \pi$
t	$\frac{\pi}{2} \to 0$

よって

$$\begin{aligned}\text{左辺} &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n t \cdot (-dt) \\ &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n t\,dt \\ &= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,dt\end{aligned}$$

定積分の値は，変数の文字には無関係なので

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \text{右辺}$$

以上より，$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$

（2） 与式 $\displaystyle= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^7 x\,dx$

$$\begin{aligned}&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\,dx \qquad \cdots\text{（1）より} \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\,dx \\ &= 2 \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \mathbf{\frac{32}{35}}\end{aligned}$$

6. $\displaystyle I_n = \int (\log x)^n \cdot 1\,dx$

$$\begin{aligned}&= (\log x)^n \cdot x - \int n(\log x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x} \cdot x\,dx \\ &= x(\log x)^n - n\int (\log x)^{n-1}\,dx\end{aligned}$$

ここで，$\displaystyle\int (\log x)^{n-1}\,dx = I_{n-1}$ で，$n-1 \geqq 0$ より，$n \geqq 1$ であるから

$$I_n = x(\log x)^n - n\,I_{n-1} \qquad (n \geqq 1)$$

■