練習問題 2-A

1. (1)　定義域は，$x \geqq 0$

$$y' = \sqrt{x} + (x-1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{2x+(x-1)}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$$
$$y'' = \frac{3\cdot 2\sqrt{x} - (3x-1)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2}$$
$$= \frac{6x-(3x-1)}{4x\sqrt{x}}$$
$$= \frac{3x+1}{4x\sqrt{x}}$$

$y' = 0$ とすると，$x = \frac{1}{3}$

$y'' = 0$ とすると，$x = -\frac{1}{3}$

ここで，$x \geqq 0$ であるから，$y'' = 0$ となる点はない．

$x = 0$ のとき，$y = 0$

$x = \frac{1}{3}$ のときの y の値は

$$y = \left(\frac{1}{3} - 1\right)\sqrt{\frac{1}{3}}$$
$$= -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$= -\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

y の増減表は次のようになる．

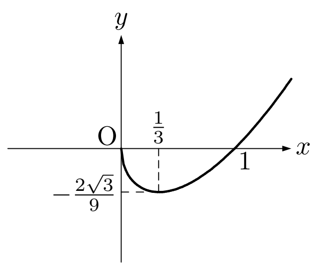
x	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y''		$+$	$+$	$-$
y	0	$\searrow$	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$

よって

極大値　なし

極小値　$\boldsymbol{-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}}$　$\boldsymbol{\left(x = \dfrac{1}{3}\right)}$

変曲点　なし



(2)　$y' = 1 - 2\sin x$

$y'' = -2\cos x$

$y' = 0$ とすると

$2\sin x = 1$

$\sin x = \frac{1}{2}$

よって，$x = \frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi$

$y'' = 0$ とすると

$-2\cos x = 0$

$\cos x = 0$

よって，$x = \frac{\pi}{2}$，$\frac{3}{2}\pi$

$x = 0$ のときの y の値は

$$y = 0 + 2\cos 0$$
$$= 2\cdot 1 = 2$$

$x = \frac{\pi}{6}$ のときの y の値は

$$y = \frac{\pi}{6} + 2\cos\frac{\pi}{6}$$
$$= \frac{\pi}{6} + 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$$

$x = \frac{\pi}{2}$ のときの y の値は

$$y = \frac{\pi}{2} + 2\cos\frac{\pi}{2}$$
$$= \frac{\pi}{2} + 2\cdot 0 = \frac{\pi}{2}$$

$x = \frac{5}{6}\pi$ のときの y の値は

$$y = \frac{5}{6}\pi + 2\cos\frac{5}{6}\pi$$
$$= \frac{5}{6}\pi 2 + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}$$

$x = \frac{3}{2}\pi$ のときの y の値は

$$y = \frac{3}{2}\pi + 2\cos\frac{3}{2}\pi$$
$$= \frac{3}{2}\pi + 2\cdot 0 = \frac{3}{2}\pi$$

$x = 2\pi$ のときの y の値は

$$y = 2\pi + 2\cos 2\pi$$
$$= 2\pi + 2\cdot 1 = 2 + 2\pi$$

y の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
y'		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
y''		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
y	2	$\nearrow$		$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$		$\nearrow$	$\frac{3}{2}\pi$	$\nearrow$	

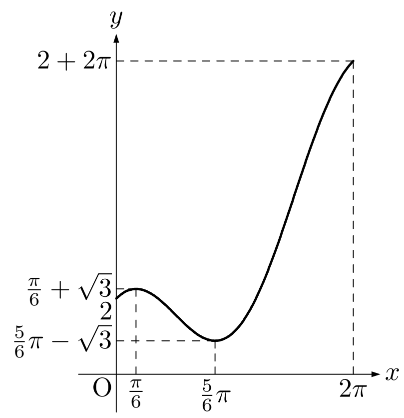
$\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$　　$\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$　　$2+2\pi$

よって

極大値　$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6} + \sqrt{3}}$　$\boldsymbol{\left(x = \dfrac{\pi}{6}\right)}$

極小値　$\boldsymbol{\dfrac{5}{6}\pi - \sqrt{3}}$　$\boldsymbol{\left(x = \dfrac{5}{6}\pi\right)}$

変曲点　$\boldsymbol{\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)}$，$\boldsymbol{\left(\dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi\right)}$



（3） $y' = \dfrac{2x}{x^2+1}$

$y'' = \dfrac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2}$

$= \dfrac{2(x^2+1-2x^2)}{(x^2+1)^2}$

$= -\dfrac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^4}$

$y' = 0$ とすると，$x = 0$

$y'' = 0$ とすると，$x^2 - 1 = 0$ より，$x = \pm 1$

$x = 0$ のときの y の値は

$y = \log(0^2+1)$

$= \log 1 = 0$

$x = \pm 1$ のときの y の値は

$y = \log\{(\pm 1)^2 + 1\}$

$= \log(1+1) = \log 2$

y の増減表は次のようになる．

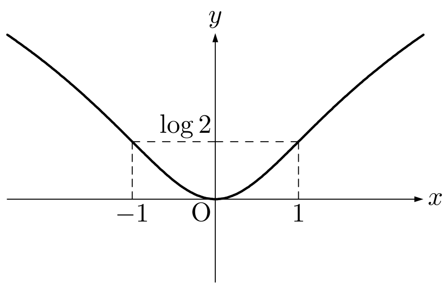
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y	↘	$\log 2$	↘	0	↗	$\log 2$	↗

よって

極大値　なし

極小値　$\boldsymbol{0}$　$\boldsymbol{(x = 0)}$

変曲点　$\boldsymbol{(\pm 1,\ \log 2)}$



（4） $y' = e^x \sin x + e^x \cos x$

$= e^x(\sin x + \cos x)$

$y'' = e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x)$

$= 2e^x \cos x$

$y' = 0$ とすると，$e^x \fallingdotseq 0$ であるから，$\sin x + \cos x = 0$

$\sin x = -\cos x$

$\dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{-\cos x}{\cos x}$

$\tan x = -1$

$x = \dfrac{3}{4}\pi$

$y'' = 0$ とすると，$e^x \fallingdotseq 0$ であるから，$\cos x = 0$

$x = \dfrac{\pi}{2}$

$x = 0$ のときの y の値は

$y = e^0 \sin 0 = 0$

$x = \dfrac{\pi}{2}$ のときの y の値は

$y = e^{\frac{\pi}{2}} \sin \dfrac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2}}$

$x = \dfrac{3}{4}\pi$ のときの y の値は

$y = e^{\frac{3}{4}\pi} \sin \dfrac{3}{4}\pi = \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{3}{4}\pi}$

$x = \pi$ のときの y の値は

$y = e^{\pi} \sin \pi = 0$

y の増減表は次のようになる．

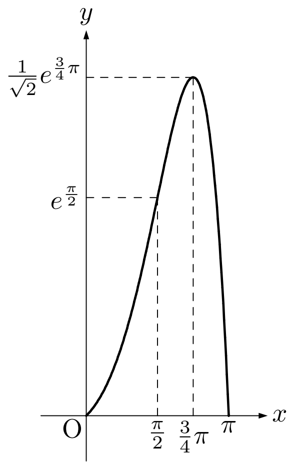
x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
y'		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y	0	↗	$e^{\frac{\pi}{2}}$	↗	$\frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{3}{4}\pi}$	↘	0

よって

極大値　$\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{3}{4}\pi}}$　$\boldsymbol{\left(x = \dfrac{3}{4}\pi\right)}$

極小値　なし

変曲点　$\boldsymbol{\left(\dfrac{\pi}{2},\ e^{\frac{\pi}{2}}\right)}$

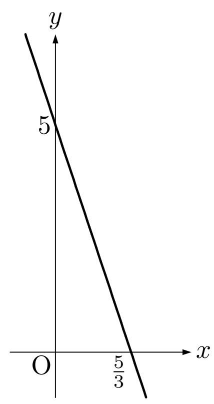


2.　2 式を上から，①，②とする．

（1）　①より，$t = x - 1$

これを，②に代入して

$y = 2 - 3(x-1) = -3x + 5$



（2）　①より，$\cos t = x - 2 \cdots$ ①$'$

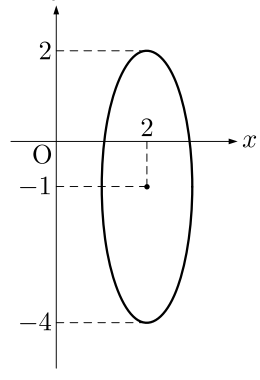
②より，$\sin t = -\dfrac{y+1}{3} \cdots$ ②$'$

また，$-1 \leqq \cos t \leqq 1$ より，$2 + (-1) \leqq 2 + \cos t \leqq 2 + 1$ であるから，$1 \leqq x \leqq 3$

①$'$, ②$'$ を，$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ に代入して

$(x-2)^2 + \dfrac{(y+1)^2}{3^2} = 1$

これは，楕円 $\dfrac{x^2}{1^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に -1 平行移動したものである．

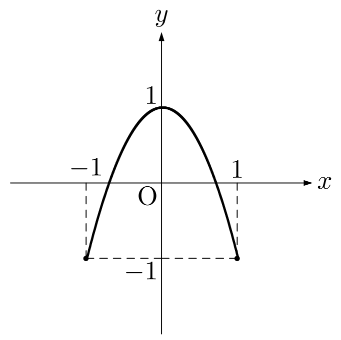


（3） ②より，$y = 1 - 2\sin^2 t \cdots$ ②$'$

①を②に代入して

$y = 1 - 2x^2$

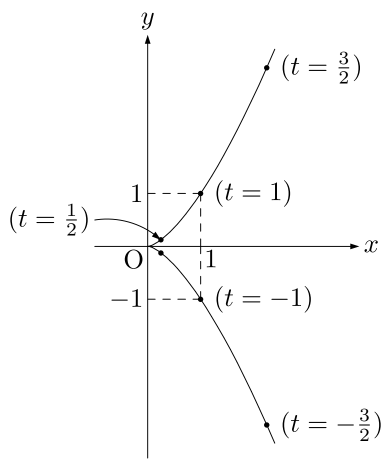
ただし，$-1 \leqq \sin t \leqq 1$ より，$-1 \leqq x \leqq 1$



（4） $x = t^2 \geqq 0$ より，$x \geqq 0$

t にいろいろな値を代入すると

t	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
x	4	$\frac{9}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4
y	-8	$-\frac{27}{4}$	-1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{27}{8}$	8



3. （1） $\dfrac{dx}{dt} = 3$

$\dfrac{dy}{dt} = 6t - 1$

したがって

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \boldsymbol{\frac{6t-1}{3}}$$

（2） $\dfrac{dx}{dt} = \cos t$

$\dfrac{dy}{dt} = 2\cos t(-\sin t) = -2\cos t \sin t$

したがって，$\cos t \neq 0$ のとき，すなわち

$t \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi \quad$ (n は整数) のとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-2\cos t \sin t}{\cos t}$$

$$= \boldsymbol{-2\sin t}$$

（3） $\dfrac{dx}{dt} = -2e^{-2t}$

$\dfrac{dy}{dt} = 2te^{t^2}$

したがって

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2te^{t^2}}{-2e^{-2t}}$$

$$= -t^{t^2-(-2t)} = \boldsymbol{-te^{t^2+2t}}$$

（4） $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{t}$

$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{(1-t)^2}$

$t > 0,\ t \neq 0$ であるから

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{(1-t)^2}}{\frac{1}{t}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{t}{(1-t)^2}}$$

4. （1） $t = 1$ のとき

$x = 1^2 + 1 = 2$

$y = e^1 = e$

また

$\dfrac{dx}{dt} = 2t, \quad \dfrac{dy}{dt} = e^t$

したがって

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^t}{2t}$$

よって，$\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{t=1} = \dfrac{e^1}{2 \cdot 1} = \dfrac{e}{2}$

以上より，接線の方程式は

$y - e = \dfrac{e}{2}(x - 2)$

$y = \dfrac{e}{2}x - e + e$

，すなわち，$\boldsymbol{y = \dfrac{e}{2}x}$

（2） $t = \dfrac{\pi}{3}$ のとき

$x = \sin\dfrac{\pi}{3} + 1 = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$y = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$

また

$\dfrac{dx}{dt} = \cos t, \quad \dfrac{dy}{dt} = -\sin t$

したがって

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\tan t$$

よって，$\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{t=\frac{\pi}{3}} = -\tan\dfrac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$

以上より，接線の方程式は

$y - \dfrac{1}{2} = -\sqrt{3}\left\{x - \left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$

$y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3} + \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}$

すなわち，$\boldsymbol{y = -\sqrt{3}x + 2 + \sqrt{3}}$

5. 時刻 t における動点 P の速度を v とすると

$v = \dfrac{dx}{dt} = a\omega e^{\omega t} - b\omega e^{-\omega t}$

時刻 t における動点 P の加速度を α とすると

$$\alpha = \frac{dv}{dt} = a\omega^2 e^{\omega t} + b\omega^2 e^{-\omega t}$$

$$= \omega^2(ae^{\omega t} + be^{-\omega t})$$

$$= \omega^2 x$$

よって，加速度 α は x に比例する．

練習問題 1-B

1. （1） $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$ であるから

$$\begin{aligned}\text{左辺} &= (1+x^2)\cdot\frac{1}{1+x^2}\\ &= 1 = \text{右辺}\end{aligned}$$

（2）（1）の両辺を n 回微分すると

$$\begin{aligned}&(1+x^2)y^{(n+1)} + {}_n\mathrm{C}_1(1+x^2)'y^{(n)} + {}_n\mathrm{C}_2(1+x^2)''y^{(n-1)}\\ &\quad + {}_n\mathrm{C}_3(1+x^2)'''y^{(n-2)} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n(1+x^2)^{(n+1)}y' = 1'\\ &(1+x^2)y^{(n+1)} + n\cdot 2xy^{(n)} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 2y^{(n-1)}\\ &\qquad\qquad + 0 + \cdots + 0 = 0\end{aligned}$$

よって

$$(1+x^2)y^{(n+1)} + 2nxy^{(n)} + n(n-1)y^{(n-1)} = 0$$

2. （1） $\dfrac{dx}{dt} = -a\sin t,\quad \dfrac{dy}{dt} = b\cos t$

したがって

$$\text{左辺} = \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b\cos t}{a\sin t}$$

$$\text{右辺} = -\frac{b^2\cdot a\cos t}{a^2\cdot b\sin t} = -\frac{b\cos t}{a\sin t}$$

よって，左辺 $=$ 右辺

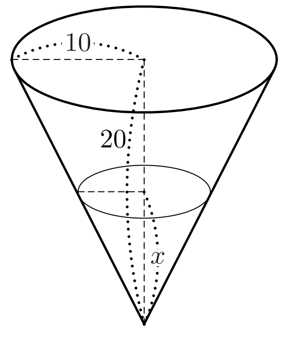
（2）（1）より，点 $(x_0,\ y_0)$ における接線の傾きは，$-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$ であるから，接線の方程式は

$$\begin{aligned}y - y_0 &= -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0)\\ a^2y_0(y-y_0) &= -b^2x_0(x-x_0)\\ a^2y_0y - a^2y_0^2 &= -b^2x_0x + b^2x_0^2\\ b^2x_0x + a^2y_0y &= b^2x_0^2 + a^2y_0^2\\ \frac{b^2x_0x + a^2y_0y}{a^2b^2} &= \frac{b^2x_0^2 + a^2y_0^2}{a^2b^2} \quad (a \neq 0,\ b \neq 0 \text{ より})\\ \frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} &= \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}\end{aligned}$$

ここで，$(x_0,\ y_0)$ は楕円上の点であるから，$\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$

よって，$\dfrac{x_0x}{a^2} + \dfrac{y_0y}{b^2} = 1$

3. 時刻 t における水の深さを $x\,(\mathrm{cm})$，体積を $V\,(\mathrm{cm}^3)$ とする．



容器と水の入った部分の円錐形は相似なので，水面の半径は，$x \times \dfrac{10}{20} = \dfrac{1}{2}x$

よって，$V = \dfrac{1}{3}\pi\cdot\left(\dfrac{1}{2}x\right)^2\cdot x = \dfrac{1}{12}\pi x^3$

この両辺を t で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{12}\pi x^3\right)\\ &= \frac{1}{12}\cdot 3\pi x^2\frac{dx}{dt}\\ &= \frac{1}{4}\pi x^2\frac{dx}{dt}\end{aligned}$$

ここで，水面の上がる速さは，$\dfrac{dx}{dt}$ であり，毎分 $15\,\mathrm{cm}^3$ の割合で水を入れるので，$\dfrac{dV}{dt} = 15$ であるから，$\dfrac{1}{4}\pi x^2\dfrac{dx}{dt} = 15$

すなわち，$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{60}{\pi x^2}$

以上より，水の深さが $8\,\mathrm{cm}$ のときの水面の上がる速さは，この式に $x=8$ 代入して

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{x=8} = \frac{60}{\pi\cdot 8^2} = \frac{15}{16\pi}$$

よって，$\boldsymbol{\dfrac{15}{16\pi}}$ (cm/分)

4. （1） $\mathrm{P}(x,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ 50-4t)$，$\mathrm{OP}^2 + \mathrm{OQ}^2 = \mathrm{PQ}^2$ であるから

$$x^2 + (50-4t)^2 = 100^2$$

これより

$$\begin{aligned}x^2 &= 100^2 - (50-4t)^2\\ &= 10000 - (2500 - 400t + 16t^2)\\ &= 7500 + 400t - 16t^2\end{aligned}$$

$x > 0$ より

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{7500 + 400t - 16t^2}\\ &= \sqrt{4(1875 + 100t - 4t^2)}\\ &= \boldsymbol{2\sqrt{1875 + 100t - 4t^2}}\end{aligned}$$

（2） t 秒後の点 P の速度を v とすると

$$\begin{aligned}v &= \frac{dx}{dt}\\ &= 2\cdot\frac{1}{2}(1875 + 100t - 4t^2)^{-\frac{1}{2}}(1875 + 100t - 4t^2)'\\ &= \boldsymbol{\frac{100 - 8t}{\sqrt{1875 + 100t - 4t^2}}}\end{aligned}$$

∎