2章　微分の応用

§2　いろいろな応用 (p.25〜p.)

BASIC

106 (1) $y=(1+x)^{-1}$

$y'=-1\cdot(1+x)^{-2}(1+x)'$

$=-(1+x)^{-2}$

$y''=-(-2)\cdot(1+x)^{-3}(1+x)'$

$=\boldsymbol{\dfrac{2}{(1+x)^3}}$

(2) $y'=\dfrac{1}{2x-1}\cdot(2x-1)'$

$=\dfrac{2}{2x-1}=2(2x-1)^{-1}$

$y''=2\cdot(-1)\cdot(2x-1)^{-2}(2x-1)'$

$=\boldsymbol{-\dfrac{4}{(2x-1)^2}}$

(3) $y'=2\sin x\cdot(\sin x)'$

$=2\sin x\cos x$

$y''=2\{(\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)'\}$

$=\boldsymbol{2(\cos^2 x-\sin^2 x)}$

〔別解〕

$y'=2\sin x\cdot(\sin x)'$

$=2\sin x\cos x=\sin 2x$

$y''=\cos 2x\cdot(2x)'$

$=\boldsymbol{2\cos 2x}\quad\left(=2(\cos^2 x-\sin^2 x)\right)$

(4) $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$

$=(1+x^2)^{-1}$

$y''=-1\cdot(1+x^2)^{-2}\cdot(1+x^2)'$

$=\boldsymbol{-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}}$

107 (数学的帰納法による証明は省略)

(1) $y'=e^{-x}\cdot(-1)$

$=-e^{-x}$

$y''=-e^{-x}\cdot(-1)$

$=e^{-x}$

よって，$\boldsymbol{y^{(n)}=(-1)^n e^{-x}}$

(2) $y'=\dfrac{1}{1-x}(1-x)'$

$=-\dfrac{1}{1-x}=-(1-x)^{-1}$

$y''=-(-1)\cdot(1-x)^{-2}(1-x)'$

$=-(1-x)^{-2}$

$=-\dfrac{1}{(1-x)^2}$

$y'''=-(-2)\cdot(1-x)^{-3}\cdot(1-x)'$

$=-2(1-x)^{-3}$

$=-\dfrac{2}{(1-x)^3}$

$y^{(4)}=-2\cdot(-3)\cdot(1-x)^{-4}\cdot(1-x)'$

$=-3\cdot 2(1-x)^{-4}$

$=-\dfrac{3\,!}{(1-x)^4}$

よって，$\boldsymbol{y^{(n)}=-\dfrac{(n-1)\,!}{(1-x)^n}}$

108 (1) $y^{(4)}=(x)^{(4)}e^{-x}+{}_4\mathrm{C}_1(x)^{(3)}(e^{-x})'+{}_4\mathrm{C}_2(x)''(e^{-x})''$

$+{}_4\mathrm{C}_3(x)'(e^{-x})'''+x(e^{-x})^{(4)}$

$=0\cdot e^{-x}+4\cdot 0\cdot(-e^{-x})+6\cdot 0\cdot e^{-x}$

$+4\cdot 1\cdot(-e^{-x})+x\cdot e^{-x}$

$=-4e^{-x}+xe^{-x}$

$=\boldsymbol{(x-4)e^{-x}}$

(2) $y^{(4)}=(e^x)^{(4)}\sin x+{}_4\mathrm{C}_1(e^x)^{(3)}(\sin x)'$

$+{}_4\mathrm{C}_2(e^x)''(\sin x)''+{}_4\mathrm{C}_3(e^x)'(\sin x)'''$

$+e^x(\sin x)^{(4)}$

$=e^x\sin x+4\cdot e^x\cdot(\cos x)+6\cdot e^x\cdot(-\sin x)$

$+4\cdot e^x\cdot(-\cos x)+e^x\cdot\sin x$

$=e^x\sin x+4e^x\cos x-6e^x\sin x$

$-4e^x\cos x+e^x\sin x$

$=\boldsymbol{-4e^x\sin x}$

109 (1) $y'=12x^3-12x^2$

$y''=36x^2-24x$

$=12x(3x-2)$

$y''=0$ とすると，$x=0,\ \dfrac{2}{3}$

$x=0$ のときの y の値は

$y=0$

$x=\dfrac{2}{3}$ のときの y の値は

$y=3\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^4-4\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^3$

$=\dfrac{16}{27}-\dfrac{32}{27}=-\dfrac{16}{27}$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y		0		$-\frac{16}{27}$	

よって

$0<x<\dfrac{2}{3}$ のとき　上に凸

$x<0,\ \dfrac{2}{3}<x$ のとき　下に凸

変曲点は，$\boldsymbol{(0,\ 0),\ \left(\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{16}{27}\right)}$

(2) $y'=(\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)-2\cos x+1$

$=\cos^2 x-\sin^2 x-2\cos x+1$

$y''=2\cos x(\cos x)'-2\sin x(\sin x)'+2\sin x$

$=-2sinx\cos x-2\sin x\cos x+2\sin x$

$=2\sin x-4\sin x\cos x$

$=2\sin x(1-2\cos x)$

$0<x<\pi$ において，$y''=0$ となるのは，$1-2\cos x=0$ より，$x=\dfrac{\pi}{3}$

$x=\dfrac{\pi}{3}$ のときの y の値は

$y = \sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{3} - 2\sin\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3}$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{2} - 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\pi}{3}$

$= -\dfrac{3\sqrt{3}}{4} + \dfrac{\pi}{3}$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
y''		$-$	0	$+$	
y			$-\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{3}$		

よって

$0 < x < \dfrac{\pi}{3}$ のとき　上に凸

$\dfrac{\pi}{3} < x < \pi$ のとき　下に凸

変曲点は，$\left(\dfrac{\pi}{3},\ -\dfrac{3\sqrt{3}}{4} + \dfrac{\pi}{3}\right)$

110（1）　$y' = 3x^2 - 12x + 9$

$= 3(x^2 - 4x + 3)$

$= 3(x-1)(x-3)$

$y'' = 6x - 12$

$= 6(x-2)$

$y' = 0$ とすると，$x = 1,\ 3$

$y'' = 0$ とすると，$x = 2$

$x = 1$ のときの y の値は

$y = 1^3 - 6\cdot 1^2 + 9\cdot 1$

$= 1 - 6 + 9 = 4$

$x = 2$ のときの y の値は

$y = 2^3 - 6\cdot 2^2 + 9\cdot 2$

$= 8 - 24 + 18 = 2$

$x = 3$ のときの y の値は

$y = 3^3 - 6\cdot 3^2 + 9\cdot 3$

$= 27 - 54 + 27 = 0$

よって，y の増減表は次のようになる．

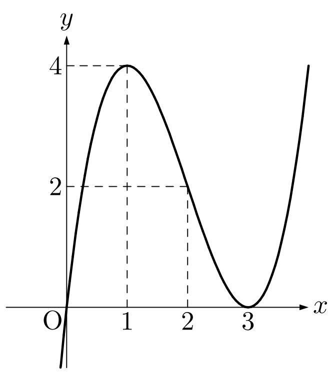
x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	↗	4	↘	2	↘	0	↗

よって

極大値　4　$(x = 1)$

極小値　0　$(x = 3)$

変曲点　$(2,\ 2)$



（2）　$y' = (x-1)'e^x + (x-1)(e^x)'$

$= e^x + (x-1)e^x$

$= xe^x$

$y'' = (x)'e^x + x(e^x)'$

$= e^x + xe^x$

$= (x+1)e^x$

$y' = 0$ とすると，$x = 0$

$y'' = 0$ とすると，$x + 1 = 0$ より，$x = -1$

$x = -1$ のときの y の値は

$y = (-1-1)e^{-1} = -\dfrac{2}{e}$

$x = 0$ のときの y の値は

$y = (0-1)e^0 = -1$

y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	↘	$-\frac{2}{e}$	↘	-1	↗

よって

極大値　なし

極小値　-1　$(x = 0)$

変曲点　$\left(-1,\ -\dfrac{2}{e}\right)$

また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x-1)e^x = \infty$

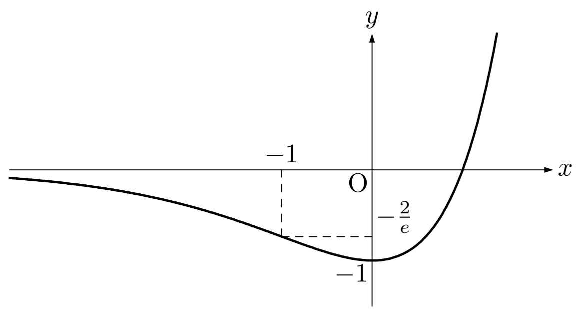
$x = -t$ とおいて

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^x = \lim_{t\to\infty}(-t-1)e^{-t}$

$\displaystyle= \lim_{t\to\infty}\frac{-t-1}{e^t}$

$\displaystyle= \lim_{t\to\infty}\frac{(-t-1)'}{(e^t)'}$

$\displaystyle= \lim_{t\to\infty}\frac{-1}{e^t} = 0$



111（1）　t にいろいろな値を代入すると

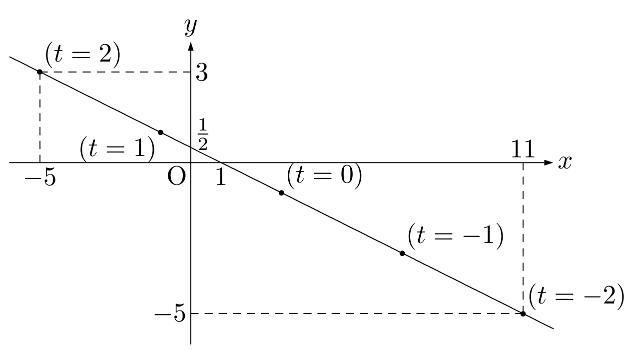
t	-2	-1	0	1	2
x	11	7	3	-1	-5
y	-5	-3	-1	1	3

y 軸との交点は，$x = 0$ とおいて，$3 - 4t = 0$ より，$t = \dfrac{3}{4}$

よって，$y = 2\cdot\dfrac{3}{4} - 1 = \dfrac{1}{2}$

x 軸との交点は，$y = 0$ とおいて，$2t - 1 = 0$ より，$t = \dfrac{1}{2}$

よって，$x = 3 - 4\cdot 12 = 1$



※ 2 式から t を消去すると，$y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$ である．

（2）　$x^2 = \left(\dfrac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2$

$= \dfrac{e^{2t} + 2e^t e^{-t} + e^{-2t}}{4}$

$= \dfrac{e^{2t} + e^{-2t}}{4} + \dfrac{1}{2}$

$y^2 = \left(\dfrac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2$

$= \dfrac{e^{2t} - 2e^t e^{-t} + e^{-2t}}{4}$

$= \dfrac{e^{2t} + e^{-2t}}{4} - \dfrac{1}{2}$

よって

$x^2 - y^2 = \dfrac{e^{2t} + e^{-2t}}{4} + \dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{e^{2t} + e^{-2t}}{4} - \dfrac{1}{2}\right)$

$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$

したがって，$x^2 - y^2 = 1$

ここで，$e^t > 0$，$e^{-t} > 0$ より，相加平均と相乗平均の大小関係より

$x = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} \geqq \sqrt{e^t \cdot e^{-t}}$

$= \sqrt{1} = 1$

すなわち，$x \geqq 1$

以上より，与えられた曲線は，双曲線 $x^2 - y^2 = 1$　$(x \geqq 1)$ である．

112（1）　$\dfrac{dx}{dt} = 2\sin t \cdot (\sin t)' = 2\sin t\cos t = \sin 2t$

$\dfrac{dy}{dt} = -\sin 2t(2t)' = -2\sin 2t$

したがって，$\sin 2t \fallingdotseq 0$ のとき，すなわち，$t \fallingdotseq \dfrac{n}{2}\pi$　（n は整数）のとき

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{-2\sin 2t}{\sin 2t}$

$= \mathbf{-2}$

（2）　$x = 2\log|t|$ より

$\dfrac{dx}{dt} = 2 \cdot \dfrac{1}{t} = \dfrac{2}{t}$

$y = t^{\frac{1}{2}}$ より

$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{t}}}{\frac{2}{t}}$

$= \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{t}} \times 2t}{\frac{2}{t} \times 2t} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{t}}{4}}$

113（1）　$t = -1$ のとき

$x = 1 + (-1)^2 = 2$

$y = 1 - 2 \cdot (-1) = 3$

よって，$t = -1$ に対応する点は，**(2，3)**

また，$\dfrac{dx}{dt} = 2t$，$\dfrac{dy}{dt} = -2$ であるから，$t \fallingdotseq 0$ のとき

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{-2}{2t} = -\dfrac{1}{t}$

したがって，求める接線の方程式は

$y - 3 = -\dfrac{1}{-1}(x - 2)$

$\boldsymbol{y = x + 1}$

（2）　$t = \dfrac{\pi}{3}$ のとき

$x = 4\sin\dfrac{2}{3}\pi = 4 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

$y = 2\sin\pi = 0$

よって，$t = \dfrac{\pi}{3}$ に対応する点は，$\boldsymbol{(2\sqrt{3},\ 0)}$

また，$\dfrac{dx}{dt} = 8\cos 2t$，$\dfrac{dy}{dt} = 6\cos 3t$ であるから，$t \fallingdotseq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{n}{2}\pi$　（n は整数）のとき

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{6\cos 3t}{8\cos 2t} = \dfrac{3\cos 3t}{4\cos 2t}$

したがって，求める接線の方程式は

$y - 0 = \dfrac{3\cos\pi}{4\cos\frac{2}{3}\pi}(x - 2\sqrt{3})$

$y = \dfrac{3 \cdot (-1)}{4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}(x - 2\sqrt{3})$

$y = \dfrac{3}{2}(x - 2\sqrt{3})$

$\boldsymbol{y = \dfrac{3}{2}x - 3\sqrt{3}}$

114（1）　t 秒後の点 P の x 座標を $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$，速度を $v(t)$，加速度を $\alpha(t)$ とすると

$v(t) = \dfrac{d}{dt}x(t) = 3t^2 - 12t + 9$

$\alpha(t) = \dfrac{d}{dt}v(t) = 6t - 12$

よって

$x(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2$

$= 8 - 24 + 18 = \mathbf{2}$

$v(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9$

$= 12 - 24 + 9 = \mathbf{-3}$

$\alpha(2) = 6 \cdot 2 - 12 = \mathbf{0}$

（2）　運動の向きが変わるのは，$v(t)$ の符号が変わるときであるから，$v(t) = 0$，すなわち $3t^2 - 12t + 9 = 0$ を解いて

$3(t^2 - 4t + 3) = 0$

$3(t - 1)(t - 3) = 0$

$t = 1,\ 3$

$v(t)$ の符号の変化を調べると

$x(t)$	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$v(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$t = 1,\ 3$ の前後で，$v(t)$ の符号が変わるので，点 P が運動の向きを変えるのは，**1 秒後，3 秒後**

CHECK

115（1）　$y' = 2\cos x \cdot (-\sin x)$

$= -2\sin x\cos x$

$y'' = -2\{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x)\}$

$\boldsymbol{= 2(\sin^2 x - \cos^2 x)}$

（2）　$y = (1 + 2x)^{\frac{1}{2}}$

$y' = \dfrac{1}{2}(1 + 2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2$

$= (1 + 2x)^{-\frac{1}{2}}$

$$y'' = -\frac{1}{2}(1+2x)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2$$
$$= -\frac{1}{(1+2x)^{\frac{3}{2}}} = \boldsymbol{-\frac{1}{(1+2x)\sqrt{1+2x}}}$$

116　（数学的帰納法による証明は省略）

（1）　$y = e^{-(x-1)} = e^{1-x}$

$$y' = e^{1-x} \cdot (-1)$$
$$= -e^{1-x}$$
$$= (-1)^1 e^{1-x}$$
$$y'' = -e^{1-x} \cdot (-1)$$
$$= -e^{1-x}$$
$$= (-1)^2 e^{1-x}$$

よって，$\boldsymbol{y^{(n)} = (-1)^n e^{1-x} = \frac{(-1)^n}{e^{x-1}}}$

（2）　$y = (1+x)^{-1}$

$$y' = -1(1+x)^{-2}(1+x)'$$
$$= -(1+x)^{-2}$$
$$= -\frac{1}{(1+x)^2}$$
$$y'' = -(-2) \cdot (1+x)^{-3}(1+x)'$$
$$= 2(1+x)^{-3}$$
$$= \frac{2}{(1+x)^3}$$
$$y''' = 2 \cdot (-3) \cdot (1+x)^{-4} \cdot (1+x)'$$
$$= -3 \cdot 2(1+x)^{-4}$$
$$= -\frac{3\,!}{(1+x)^4}$$
$$y^{(4)} = -3\,! \cdot (-4)(1+x)^{-5} \cdot (1+x)'$$
$$= 4 \cdot 3\,!(1+x)^{-5}$$
$$= \frac{4\,!}{(1+x)^5}$$

よって，$\boldsymbol{y^{(n)} = (-1)^n \frac{n\,!}{(1+x)^{n+1}}}$

117

$$y^{(5)} = (x^2)^{(5)} e^x + {}_5\mathrm{C}_1 (x^2)^{(4)} (e^x)' + {}_5\mathrm{C}_2 (x^2)''' (e^x)''$$
$$+ {}_5\mathrm{C}_3 (x^2)'' (e^x)''' + {}_5\mathrm{C}_4 (x^2)' (e^x)^{(4)} + x^2 (e^x)^{(5)}$$
$$= 0 \cdot e^x + 5 \cdot 0 \cdot e^x + 10 \cdot 0 \cdot e^x$$
$$+ 10 \cdot 2 \cdot e^x + 5 \cdot 2x \cdot e^x + x^2 e^x$$
$$= 20e^x + 10xe^x + x^2 e^x$$
$$\boldsymbol{= (x^2 + 10x + 20)e^x}$$

118（1）　$y' = 4x^3 + 4x - 8$

$$y'' = 12x^2 + 4$$
$$= 4(3x^2 + 1)$$

$x^2 \geqq 0$ より，$4(3x^2+1) > 0$

よって，曲線は**常に下に凸**であり，変曲点はない．

（2）　$y' = -\frac{(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}$

$$= -\frac{2x}{(x^2+3)^2}$$
$$y'' = -\frac{(2x)'(x^2+3)^2 - 2x\{(x^2+3)^2\}'}{(x^2+3)^4}$$
$$= -\frac{2(x^2+3)^2 - 2x \cdot 2(x^2+3) \cdot 2x}{(x^2+3)^4}$$
$$= -\frac{2(x^2+3)^2 - 8x^2(x^2+3)}{(x^2+3)^4}$$
$$= -\frac{2(x^2+3) - 8x^2}{(x^2+3)^3}$$
$$= -\frac{2x^2 + 6 - 8x^2}{(x^2+3)^3}$$
$$= \frac{6x^2 - 6}{(x^2+3)^3}$$
$$= \frac{6(x+1)(x-1)}{(x^2+3)^3}$$

$y'' = 0$ となるのは，$x = \pm 1$

$x = \pm 1$ のときの y の値は

$$y = \frac{1}{(\pm 1)^2 + 3} = \frac{1}{4}$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$	

よって

$-1 < x < 1$ のとき　上に凸

$x < -1$，$1 < x$ のとき　下に凸

変曲点は，$\boldsymbol{\left(-1,\ \frac{1}{4}\right)}$，$\boldsymbol{\left(1,\ \frac{1}{4}\right)}$

119（1）　$y' = 3x^2 - 3$

$$= 3(x^2 - 1)$$
$$= 3(x+1)(x-1)$$
$$y'' = 6x$$

$y' = 0$ とすると，$x = -1,\ 1$

$y'' = 0$ とすると，$x = 0$

$x = -1$ のときの y の値は

$$y = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)$$
$$= -1 + 3 = 2$$

$x = 0$ のときの y の値は

$$y = 0$$

$x = 1$ のときの y の値は

$$y = 1^3 - 3 \cdot 1$$
$$= 1 - 3 = -2$$

よって，y の増減表は次のようになる．

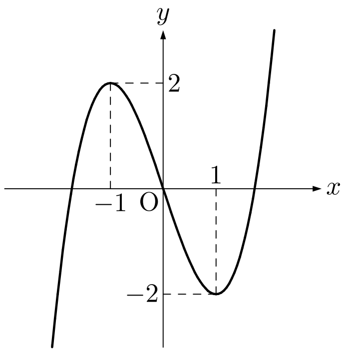
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	↗	2	↘	0	↘	-2	↗

よって

極大値　2　$(x = -1)$

極小値　-2　$(x = 1)$

変曲点　$(0,\ 0)$



（2）　$y' = \dfrac{1}{x^2+2} \cdot 2x$

$= \dfrac{2x}{x^2+2}$

$y'' = \dfrac{(2x)'(x^2+2) - 2x(x^2+2)'}{(x^2+2)^2}$

$= \dfrac{2(x^2+2) - 2x \cdot 2x}{(x^2+2)^2}$

$= \dfrac{2x^2+4-4x^2}{(x^2+2)^2}$

$= \dfrac{-2x^2+4}{(x^2+2)^2}$

$= -\dfrac{2(x^2-2)}{(x^2+2)^2}$

$y' = 0$ とすると，$x = 0$

$y'' = 0$ とすると，$x^2 - 2 = 0$ より，$x = \pm\sqrt{2}$

$x = \pm\sqrt{2}$ のときの y の値は

$y = \log\{(\pm\sqrt{2})^2 + 2\}$

$= \log 4 = 2\log 2$

$x = 0$ のときの y の値は

$y = \log(0^2 + 2) = \log 2$

y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y	↘	$2\log 2$	↘	$\log 2$	↗	$2\log 2$	↗

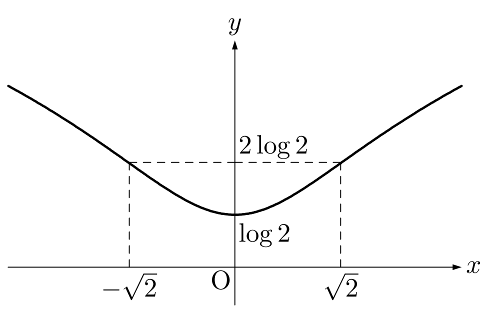
よって

極大値　なし

極小値　$\log 2$　$(x = 0)$

変曲点　$(-\sqrt{2},\ 2\log 2)$，$(\sqrt{2},\ 2\log 2)$

また，$\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \log(x^2+2) = \infty$



120（1）　$x = 3t - 2$ より，$t = \dfrac{x+2}{3}$

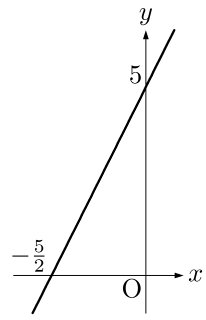
これを，$y = 6t + 1$ に代入して

$y = 6 \cdot \dfrac{x+2}{3} + 1$

$= 2(x+2) + 1$

$= 2x + 5$

すなわち，$\boldsymbol{y = 2x + 5}$　または，$\boldsymbol{2x - y + 5 = 0}$　（直線）



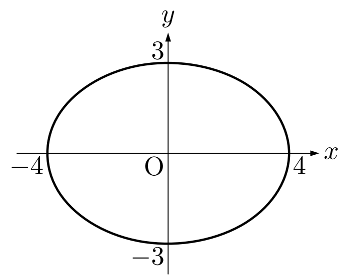
（2）　$x = 4\cos 2t$ より，$\cos 2t = \dfrac{x}{4}$

$y = 3\sin 2t$ より，$\sin 2t = \dfrac{y}{3}$

これらを，$\sin^2 2t + \cos^2 2t = 1$ に代入して

$\left(\dfrac{y}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{4}\right)^2 = 1$

すなわち，$\boldsymbol{\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1}$　（楕円）



121（1）　$\dfrac{dx}{dt} = 6t$

$\dfrac{dy}{dt} = -3t^2 + 18t$

したがって，$6t \neq 0$ のとき，すなわち，$t \neq 0$ のとき

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{-3t^2+18t}{6t}$

$= \boldsymbol{\dfrac{-t+6}{2}}$

（2）　$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{\cos^2 t}$

$\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{(\cos t)'}{\cos^2 t} = \dfrac{\sin t}{\cos^2 t}$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{\frac{\sin t}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos^2 t}}$

$= \dfrac{\frac{\sin t}{\cos^2 t} \times \cos^2 t}{\frac{1}{\cos^2 t} \times \cos^2 t} = \boldsymbol{\sin t}$

122（1）　$t = -1$ のとき

$x = (-1)^2 - 1 = 0$

$y = 1 - 2 \cdot (-1)^3 = 1 + 2 = 3$

よって，$t = -1$ に対応する点は，$\boldsymbol{(0,\ 3)}$

また，$\dfrac{dx}{dt} = 2t$，$\dfrac{dy}{dt} = -6t^2$ であるから，$t \neq 0$ のとき

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{-6t^2}{2t} = -3t$

したがって，求める接線の方程式は

$y - 3 = -3 \cdot (-1)(x - 0)$

$\boldsymbol{y = 3x + 3}$

（2）　$t = \dfrac{\pi}{6}$ のとき

$x = 3\sin\dfrac{\pi}{3} = 3 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$y = 2\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$

よって，$t = \dfrac{\pi}{6}$ に対応する点は，$\boldsymbol{\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ 0\right)}$

また，$\dfrac{dx}{dt}=6\cos 2t$，$\dfrac{dy}{dt}=-6\sin 3t$ であるから，$t\fallingdotseq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{n}{2}\pi$ （n は整数）のとき

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-6\sin 3t}{6\cos 2t}=-\frac{\sin 3t}{\cos 2t}$$

したがって，求める接線の方程式は

$$y-0=-\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{3}}\left(x-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$y=-\frac{1}{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$y=-2\left(x-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{y=-2x+3\sqrt{3}}$$

123　t 秒後の点 P の x 座標を $x(t)=e^{-\pi t}\sin\pi t$，速度を $v(t)$，加速度を $\alpha(t)$ とすると

$$\begin{aligned}v(t)&=\frac{d}{dt}x(t)=(e^{-\pi t})'\sin\pi t+e^{-\pi t}(\sin\pi t)'\\&=-\pi e^{-\pi t}\sin\pi t+\pi e^{-\pi t}\cos\pi t\\&=\pi e^{-\pi t}(-\sin\pi t+\cos\pi t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha(t)&=\frac{d}{dt}v(t)=\pi\{(e^{-\pi t})'(-\sin\pi t+\cos\pi t))\\&\qquad+e^{-\pi t}(-\sin\pi t+\cos\pi t)'\}\\&=\pi\{-\pi e^{-\pi t}(-\sin\pi t+\cos\pi t)\\&\qquad+e^{-\pi t}(-\pi\cos\pi t-\pi\sin\pi t)\}\\&=\pi^2e^{-\pi t}\{(\sin\pi t-\cos\pi t)-(\cos\pi t+\sin\pi t)\}\\&=-2\pi^2e^{-\pi t}\cos\pi t\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}v(3)&=\pi e^{-3\pi}(-\sin 3\pi+\cos 3\pi)\\&=\pi e^{-3\pi}\cdot(-1)\\&=\boldsymbol{-\pi e^{-3\pi}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha(3)&=-2\pi^2e^{-3\pi}\cos 3\pi\\&=-2\pi^2e^{-3\pi}\cdot(-1)\\&=\boldsymbol{2\pi^2e^{-3\pi}}\end{aligned}$$

STEP UP

124　$y=e^{2t}\cos 2t$ より

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt}&=2e^{2t}\cos 2t+e^{2t}\cdot(-2\sin 2t)\\&=2e^{2t}\cos 2t-2e^{2t}\sin 2t\\&=2e^{2t}(\cos 2t-\sin 2t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2}&=2\cdot 2e^{2t}(\cos 2t-\sin 2t)+2e^{2t}(-2\sin 2t-2\cos 2t)\\&=4e^{2t}(\cos 2t-\sin 2t)-4e^{2t}(\sin 2t+\cos 2t)\\&=-8e^{2t}\sin 2t\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=-8e^{2t}\sin 2t-4\cdot 2e^{2t}(\cos 2t-\sin 2t)+8\cdot e^{2t}\cos 2t\\&=-8e^{2t}\sin 2t-8e^{2t}(\cos 2t-\sin 2t)+8e^{2t}\cos 2t\\&=8e^{2t}(-\sin 2t-\cos 2t+\sin 2t+\cos 2t)\\&=8e^{2t}\cdot 0=0=\text{右辺}\end{aligned}$$

125　$y=\sqrt{1+x}$ の両辺の対数をとると

$$\log y=\log\sqrt{1+x}=\frac{1}{2}\log(1+x)$$

両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{y'}{y}&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x}\\&=\frac{1}{2(1+x)}\end{aligned}$$

これより，$2y'(1+x)=y$

両辺を n 回微分すると

$$2y^{(n+1)}(1+x)+2\cdot{}_n\mathrm{C}_1y^{(n)}(1+x)'+2\cdot{}_n\mathrm{C}_2y^{(n-1)}(1+x)''+\cdots=y^{(n)}$$

$$2y^{(n+1)}(1+x)+2y^{(n)}+0+\cdots=y^{(n)}$$

$$2y^{(n+1)}(1+x)+2y^{(n)}-y^{(n)}=0$$

よって，$2(1+x)y^{(n+1)}+(2n-1)y^{(n)}=0$

126（1）　定義域は，$x\fallingdotseq 0$

$$\begin{aligned}y'&=\frac{1}{2}\cdot 2x-\frac{1}{x^2}\\&=x-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y''&=\left(x-\frac{1}{x^2}\right)'\\&=1+\frac{2}{x^3}=\frac{x^3+2}{x^3}\end{aligned}$$

$y'=0$ となるのは，$x-1=0$ より，$x=1$

$y''=0$ となるのは，$x^3+2=0$ より，$x^3=-2$，すなわち，$x=-\sqrt[3]{2}$

$x=1$ のときの y の値は

$$\begin{aligned}y&=\frac{1^2}{2}+\frac{1}{1}\\&=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

$x=-\sqrt[3]{2}$ のときの y の値は

$$\begin{aligned}y&=\frac{(-\sqrt[3]{2})^2}{2}+\frac{1}{-\sqrt[3]{2}}\\&=\frac{(\sqrt[3]{2})^2}{2}-\frac{(\sqrt[3]{2})^2}{\sqrt[3]{2}\cdot(\sqrt[3]{2})^2}\\&=\frac{(\sqrt[3]{2})^2}{2}-\frac{(\sqrt[3]{2})^2}{2}=0\end{aligned}$$

以上より，y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$-\sqrt[3]{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	$-$	$-$		$-$	0	$+$
y''	$+$	0	$-$		$+$	$+$	$+$
y	↘	0	↘		↘	$\frac{3}{2}$	↗

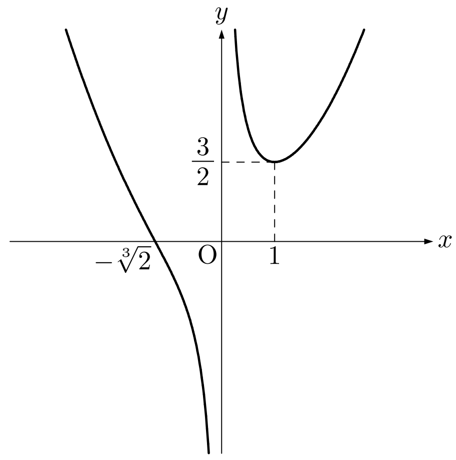
よって

極大値　なし

極小値　$\dfrac{3}{2}$　$(x=1)$

変曲点　$(-\sqrt[3]{2},\ 0)$

また，$\displaystyle\lim_{x\to+0}y=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to-0}y=-\infty$



（2）　定義域は，$x>0$

$$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\log x + \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}$$
$$= \frac{\log x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\log x + 2}{2\sqrt{x}}$$
$$y'' = \left(\frac{\log x + 2}{2\sqrt{x}}\right)'$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\log x + 2}{\sqrt{x}}\right)'$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(\log x + 2)'\cdot\sqrt{x} - (\log x + 2)(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x} - (\log x + 2)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$
$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\log x + 2}{2\sqrt{x}}}{2x}$$
$$= \frac{2 - (\log x + 2)}{4x\sqrt{x}} = -\frac{\log x}{4x\sqrt{x}}$$

$y' = 0$ となるのは，$\log x + 2 = 0$ より，$\log x = -2$，すなわち，$x = e^{-2}$

$y'' = 0$ となるのは，$\log x = 0$ より，$x = 1$

$x = e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$ のときの y の値は

$$y = \sqrt{\frac{1}{e^2}}\cdot\log e^{-2}$$
$$= \frac{1}{e}\cdot(-2) = -\frac{2}{e}$$

$x = 1$ のときの y の値は

$$y = \sqrt{1}\cdot\log 1 = 1\cdot 0 = 0$$

以上より，y の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e^2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$	$+$	$+$
y''		$+$	$+$	$+$	0	$-$
y		$\searrow$	$-\frac{2}{e}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

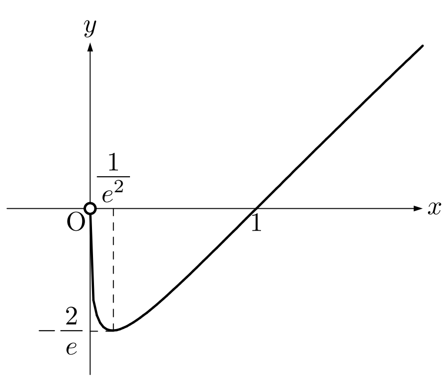
よって

極大値　なし

極小値　$-\dfrac{2}{e}$　$\left(x = \dfrac{1}{e^2}\right)$

変曲点　(1，0)

また，
$$\lim_{x\to+0} y = \lim_{x\to+0}\sqrt{x}\log x$$
$$= \lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x^{-\frac{1}{2}}}$$
$$= \lim_{x\to+0}\frac{(\log x)'}{(x^{-\frac{1}{2}})'}$$
$$= \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}$$
$$= \lim_{x\to+0}\left(-\frac{2}{x^{-\frac{1}{2}}}\right)$$
$$= \lim_{x\to+0}(-2\sqrt{x}) = 0$$



127（1）　t 秒後の水面の高さを x cm，水面の半径を r cm とすると，$r : x = 4 : 10$ であるから，$10r = 4x$，すなわち，$r = \dfrac{2}{5}x$

また，容器に水が満たされているときの水の量は

$$\frac{1}{3}\pi\cdot 4^2\cdot 10 = \frac{160}{3}\pi$$

であり，t 秒後の水の量は，$\dfrac{1}{3}\pi r^2 x$ となるから

$$\frac{1}{3}\pi r^2 x = \frac{160}{3}\pi - 2t$$

が成り立つ．これと，$r = \dfrac{2}{5}x$ より

$$\pi\cdot\left(\frac{2}{5}x\right)^2\cdot x = 160\pi - 6t$$
$$\frac{4}{25}\pi x^3 = 160\pi - 6t$$
$$x^3 = (160\pi - 6t)\times\frac{25}{4\pi}$$
$$= 1000 - \frac{75}{2\pi}t$$

よって，$\boldsymbol{x^3 = 1000 - \dfrac{75}{2\pi}t}$

（2）　$x^3 = 1000 - \dfrac{75}{2\pi}t$ の両辺を t で微分すると

$$3x^2\frac{dx}{dt} = -\frac{75}{2\pi}$$

$x = 5$ とすれば

$$3\cdot 5^2\cdot\frac{dx}{dt} = -\frac{75}{2\pi}$$
$$75\cdot\frac{dx}{dt} = -\frac{75}{2\pi}$$
$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2\pi}$$

よって，水面は，$\boldsymbol{\dfrac{1}{2\pi}}$ **cm/秒** で下降する．

128　$y^{(n)} = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)\cdots$① を数学的帰納法によって証明する．

［1］$n = 1$ のとき

$$y' = -\sin x = -\left\{-\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right\} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

よって，$n = 1$ のとき，①は成り立つ．

［2］$n = k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$$y^{(k)} = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$$

これより

$$y^{(k+1)} = \left\{\cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)\right\}'$$
$$= -\sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right)$$
$$= -\left\{-\cos\left(x + \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right\}$$
$$= \cos\left(x + \frac{(k+1)\pi}{2}\right)$$

よって，$n = k + 1$ のときも，①は成り立つ．

［1］，［2］から，①は任意の自然数 n について成り立つ．

129　$y^{(n)} = \dfrac{(2n)\,!}{2^n n\,!}(1 - 2x)^{-n-\frac{1}{2}}\cdots$① を数学的帰納法によって証明する．

［1］$n = 1$ のとき

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - 2x}} = (1 - 2x)^{-\frac{1}{2}} \text{ より}$$
$$y' = -\frac{1}{2}(1 - 2x)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2)$$
$$= (1 - 2x)^{-\frac{3}{2}}$$

一方，① より

$$y' = \frac{(2\cdot 1)\,!}{2^1 1\,!}(1 - 2x)^{-1-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{2\,!}{2\cdot 1}(1 - 2x)^{-\frac{3}{2}} = (1 - 2x)^{-\frac{3}{2}}$$

よって，$n = 1$ のとき，①は成り立つ．

［2］$n=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$$y^{(k)}=\frac{(2k)!}{2^k k!}(1-2x)^{-k-\frac{1}{2}}$$

これより

$$\begin{aligned} y^{(k+1)} &= \left\{\frac{(2k)!}{2^k k!}(1-2x)^{-k-\frac{1}{2}}\right\}' \\ &= \frac{(2k)!}{2^k k!}\cdot\left(-k-\frac{1}{2}\right)(1-2x)^{-k-\frac{1}{2}-1}\cdot(-2) \\ &= \frac{2\cdot(2k)!}{2^k k!}\cdot\frac{2k+1}{2}(1-2x)^{-(k+1)-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2k+2}{2k+2}\cdot\frac{(2k+1)(2k)!}{2^k k!}(1-2x)^{-(k+1)-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{(2k+2)(2k+1)(2k)!}{2\cdot 2^k(k+1)k!}(1-2x)^{-(k+1)-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{(2k+2)!}{2^{k+1}(k+1)!}(1-2x)^{-(k+1)-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\{2(k+1)\}!}{2^{k+1}(k+1)!}(1-2x)^{-(k+1)-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも，①は成り立つ.

［1］，［2］から，①は任意の自然数 n について成り立つ.

130（1）

$$\frac{dx}{dt}=\cos t$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt}&=-\sin 2t\cdot 2\\ &=-2\sin 2t\end{aligned}$$

よって，$\cos t \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-2\sin 2t}{\cos t}\\ &=-\frac{2\cdot 2\sin t\cos t}{\cos t}\\ &=\boldsymbol{-4\sin t}\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)=-4\cos t$$

よって，$\cos t \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2}&=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}\\ &=\frac{-4\cos t}{\cos t}=\boldsymbol{-4}\end{aligned}$$

（2）

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\frac{1}{2}(t+2)^{-\frac{1}{2}}\\ &=\frac{1}{2\sqrt{t+2}}\end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dt}=2t$$

よって，$t>-2$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t}{\frac{1}{2\sqrt{t+2}}}\\ &=\boldsymbol{4t\sqrt{t+2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)&=4\sqrt{t+2}+4t\cdot\frac{1}{2}(t+2)^{-\frac{1}{2}}\\ &=4\sqrt{t+2}+\frac{2t}{\sqrt{t+2}}\\ &=\frac{4(t+2)+2t}{\sqrt{t+2}}=\frac{6t+8}{\sqrt{t+2}}\end{aligned}$$

よって，$t>-2$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2}&=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}\\ &=\frac{\frac{6t+8}{\sqrt{t+2}}}{\frac{1}{2\sqrt{t+2}}}=\frac{\frac{6t+8}{\sqrt{t+2}}\cdot 2\sqrt{t+2}}{\frac{1}{2\sqrt{t+2}}\cdot 2\sqrt{t+2}}\\ &=2(6t+8)=\boldsymbol{12t+16}\end{aligned}$$

131（1）

$$\begin{aligned}\frac{f(1+2)-f(1)}{2}&=\frac{f(3)-f(1)}{2}\\ &=\frac{(3^2+2\cdot 3)-(1^2+2\cdot 1)}{2}\\ &=\frac{(9+6)-(1+2)}{2}\\ &=\frac{15-3}{2}=6\end{aligned}$$

$f'(x)=2x+2$ より

$$\begin{aligned}f'(1+2\theta)&=2(1+2\theta)+2\\ &=4\theta+4\end{aligned}$$

よって，$6=4\theta+4$

これより，$\boldsymbol{\theta=\frac{1}{2}}$

（2）

$$\begin{aligned}\frac{f(1+3)-f(1)}{3}&=\frac{f(4)-f(1)}{3}\\ &=\frac{\sqrt{4}-\sqrt{1}}{3}\\ &=\frac{2-1}{3}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ より

$$f'(1+3\theta)=\frac{1}{2\sqrt{1+3\theta}}$$

よって，$\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2\sqrt{1+3\theta}}$

これより，

$$\begin{aligned}2\sqrt{1+3\theta}&=3\\ 4(1+3\theta)&=9\\ 12\theta&=5\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{\theta=\frac{5}{12}}$

PLUS

132（1）　漸近線の方程式を $y=ax+b$ とすると

$$\begin{aligned}a&=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\\ &=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}\\ &=\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b&=\lim_{x\to\infty}\{f(x)-x\}\\ &=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-x)\\ &=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x+1}-x)(\sqrt{x^2+x+1}+x)}{\sqrt{x^2+x+1}+x}\\ &=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}\\ &=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{y=x+\frac{1}{2}}$ は，$x\to\infty$ のときの漸近線となる.

（2）　漸近線の方程式を $y = ax + b$ とすると

$$a = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$$
$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x}$$

$x = -t$ とおくと，$x \to -\infty$ のとき，$t \to \infty$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{\sqrt{(-t)^2 + (-t) + 1}}{-t}$$
$$= \lim_{t \to \infty} \frac{\sqrt{t^2 - t + 1}}{-t}$$
$$= \lim_{t \to \infty} \left(-\sqrt{1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}} \right) = -1$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} \{f(x) - (-x)\}$$
$$= \lim_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x)$$

$x = -t$ とおくと，$x \to -\infty$ のとき，$t \to \infty$

$$= \lim_{t \to \infty} \{\sqrt{(-t)^2 + (-t) + 1} + (-t)\}$$
$$= \lim_{t \to \infty} \{\sqrt{t^2 - t + 1} - t\}$$
$$= \lim_{t \to \infty} \frac{(\sqrt{t^2 - t + 1} - t)(\sqrt{t^2 - t + 1} + t)}{\sqrt{t^2 - t + 1} + t}$$
$$= \lim_{t \to \infty} \frac{t^2 - t + 1 - t^2}{\sqrt{t^2 - t + 1} + t}$$
$$= \lim_{t \to \infty} \frac{-1 + \frac{1}{t}}{\sqrt{1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}} + 1} = -\frac{1}{2}$$

よって，$\boldsymbol{y = -x - \frac{1}{2}}$ は，$x \to -\infty$ のときの漸近線となる．

133（1）　与式 $= \displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{(\sqrt{x} + 1)^2}$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x}{(\sqrt{x} + 1)^2}$$
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{x}}$$
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{(\sqrt{x})^2}}$$
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} \right)^2}$$
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2} = \mathbf{1}$$

（2）　$b = \displaystyle\lim_{x \to \infty} \{f(x) - x\}$

$$= \lim_{x \to \infty} \left\{ \frac{x^2}{(\sqrt{x} + 1)^2} - x \right\}$$
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - x(\sqrt{x} + 1)^2}{(\sqrt{x} + 1)^2}$$
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - x(x + 2\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 1)^2}$$
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - x^2 - 2x\sqrt{x} - x}{(\sqrt{x} + 1)^2}$$
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-2x\sqrt{x} - x}{(\sqrt{x} + 1)^2}$$
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{-2x\sqrt{x} - x}{x}}{\frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{x}}$$
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-2\sqrt{x} - 1}{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2} = -\infty$$

極限値 b が存在しないので，$f(x)$ は漸近線をもたない．

134（1）　$y' = e^{-x^2} \cdot (-x^2)'$

$$= \boldsymbol{-2xe^{-x^2}}$$

$$y'' = -2\{e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2} \cdot (-x^2)'\}$$
$$= -2(e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2})$$
$$= \boldsymbol{2(2x^2 - 1)e^{-x^2}}$$

（2）　$f(x) = e^{-x^2}$ とおく．

$$f(-x) = e^{-(-x)^2}$$
$$= e^{-x^2} = f(x)$$

よって，$f(x)$ は偶関数である．

$y' = 0$ となるのは，$-2xe^{-x^2} = 0$ より，$x = 0$

$y'' = 0$ となるのは，$2(2x^2 - 1)e^{-x^2} = 0$ より，$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$x = 0$ のときの y の値は

$$y = e^0 = 1$$

$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ のときの y の値は

$$y = e^{-(\pm\frac{1}{\sqrt{2}})^2}$$
$$= e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\searrow$

よって

極大値　1　$(x = 0)$

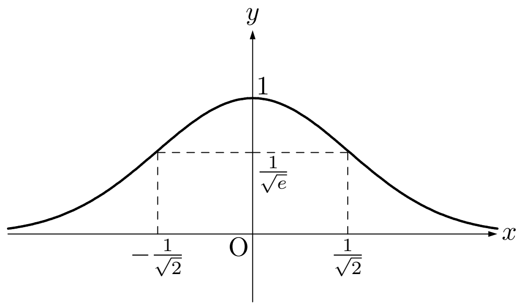
極小値　なし

変曲点　$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{e}} \right)$

また，$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} e^{-x^2} = 0$，$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} e^{-x^2} = 0$

したがって，直線 $y = 0$ は $x \to \pm\infty$ のときの漸近線である．

以上より，グラフは次のようになる．



135（1）　与式 $= \lim_{x \to 4} \frac{(e^x - e^4)'}{(x-4)'}$

$= \lim_{x \to 4} \frac{e^x}{1} = \boldsymbol{e^4}$

〔別解〕

$f(x) = e^x$ とおくと，$f(x)$ は，$x = 4$ で微分可能であり，$f'(x) = e^x$ であるから，微分係数の定義式より

与式 $= \lim_{x \to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$

$= f'(4) = \boldsymbol{e^4}$

（2）　$y = (\cos x)^{\frac{1}{\log(1+x^2)}}$ とおくと

$\log y = \log \left\{ (\cos x)^{\frac{1}{\log(1+x^2)}} \right\}$

$= \frac{1}{\log(1+x^2)} \cdot \log(\cos x)$

$= \frac{\log(\cos x)}{\log(1+x^2)}$

ここで，$\lim_{x \to 0} \log y = \lim_{x \to 0} \frac{\log(\cos x)}{\log(1+x^2)}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{(\log(\cos x))'}{(\log(1+x^2))'}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{\frac{2x}{1+x^2}}$

$= -\frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1+x^2}{\cos x}$

$= -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{1} = -\frac{1}{2}$

よって

与式 $= \lim_{x \to 0} y$

$= \lim_{x \to 0} e^{\log y}$

$= e^{-\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{e}}}$

136（1）　[1] $n = 1$ のとき

$f'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2xe^{-x^2}$

$\varphi_1(x) = -2x$ とすれば，$\varphi_1(x)$ は 1 次式であるから，$n = 1$ のとき，題意は成り立つ．

[2] $n = k$ のとき，題意が成り立つと仮定すると，$\varphi_k(x)$ を x の k 次式として

$f^{(k)}(x) = \varphi_k(x) e^{-x^2}$

が成り立つ．これより

$f^{(k+1)}(x) = \{\varphi_k(x) e^{-x^2}\}'$

$= \varphi_k'(x) e^{-x^2} + \varphi_k(x) e^{-x^2} \cdot (-2x)$

$= \{\varphi_k'(x) - 2x\varphi_k(x)\} e^{-x^2}$

ここで，$\varphi_k'(x)$ は，$(k-1)$ 次式，$2x\varphi_k(x)$ は $(k+1)$ 次式であるから，$\varphi_k'(x) - 2x\varphi_k(x)$ は，$(k+1)$ 次式となる．

よって，$\varphi_{k+1}(x) = \varphi_k'(x) - 2x\varphi_k(x)$ とおけば，$n = k+1$ のときも，題意は成り立つ．

[1]，[2] から，題意はすべての自然数 n について成り立つ．

（2）　$\varphi_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k + \cdots + a_n x^n$ とおけば

$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k e^{-x^2}$　　（a_kは定数）

ここで，$\lim_{x \to \infty} a_k x^k e^{-x^2}$ を考える．

ロピタルの定理を用いて

i）n が偶数のとき

$\lim_{x \to \infty} a_k x^k e^{-x^2} = a_k \lim_{x \to \infty} \frac{x^k}{e^{x^2}}$

$= a_k \lim_{x \to \infty} \frac{kx^{k-1}}{2xe^{x^2}} = a_k \lim_{x \to \infty} \frac{kx^{k-2}}{2e^{x^2}}$

$= a_k \lim_{x \to \infty} \frac{k(k-2)x^{k-3}}{2^2 xe^{x^2}}$

$= a_k \lim_{x \to \infty} \frac{k(k-2)x^{k-4}}{2^2 e^{x^2}}$

$= \cdots$

$= a_k \lim_{x \to \infty} \frac{k(k-2)\cdots 2}{2^{\frac{k}{2}} e^{x^2}} = 0$

ii）n が奇数のとき

$\lim_{x \to \infty} a_k x^k e^{-x^2} = a_k \lim_{x \to \infty} \frac{x^k}{e^{x^2}}$

$= a_k \lim_{x \to \infty} \frac{kx^{k-1}}{2xe^{x^2}} = a_k \lim_{x \to \infty} \frac{kx^{k-2}}{2e^{x^2}}$

$= \cdots$

$= a_k \lim_{x \to \infty} \frac{k(k-2)\cdots 3x}{2^{\frac{k-1}{2}} e^{x^2}}$

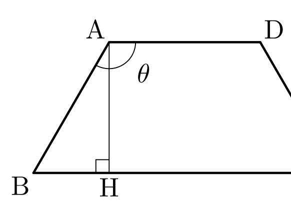
$= a_k \lim_{x \to \infty} \frac{k(k-2)\cdots 3 \cdot 1}{2^{\frac{k+1}{2}} xe^{x^2}} = 0$

したがって，$f^{(n)}$ のすべての項が 0 に収束するので

$\lim_{x \to \infty} f^{(n)} = \mathbf{0}$

137　下の図のような，AD // BC，AB = AD = CD = 1 の台形 ABCD を考える．

※ 等脚台形になることの証明は略



$\angle A = \theta$ とし，A から辺 BC に下ろした垂線の足を H とする．ただし，$\frac{\pi}{3} < \theta < \pi$

$\angle ABH = \pi - \theta$ であるから

$AH = 1 \cdot \sin(\pi - \theta) = \sin\theta$

$BH = 1 \cdot \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

これより，$BC = 1 + (-\cos\theta) \times 2 = 1 - 2\cos\theta$ であるから

$S = \frac{1}{2}(AD + BC) \times AH$

$= \frac{1}{2}\{1 + (1 - 2\cos\theta)\}\sin\theta$

$= (1 - \cos\theta)\sin\theta$

S を θ で微分すると

$$
\begin{aligned}
S' &= \sin\theta\cdot\sin\theta + (1-\cos\theta)\cdot\cos\theta \\
&= \sin^2\theta + \cos\theta - \cos^2\theta \\
&= (1-\cos^2\theta) + \cos\theta - \cos^2\theta \\
&= -2\cos^2\theta + \cos\theta + 1 \\
&= -(2\cos^2\theta - \cos\theta - 1) \\
&= -(2\cos\theta + 1)(\cos\theta - 1)
\end{aligned}
$$

$S' = 0$ とすると，$\cos\theta = -\frac{1}{2}$，$1$

よって，$\frac{\pi}{3} < \theta < \pi$ において，$S' = 0$ となるのは，$\theta = \frac{2}{3}\pi$

$\theta = \frac{2}{3}\pi$ のときの S の値は

$$
\begin{aligned}
S &= \left(1 - \cos\frac{2}{3}\pi\right)\sin\frac{2}{3}\pi \\
&= \left(1 + \frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}
\end{aligned}
$$

S の増減表は次のようになる．

θ	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{2\pi}{3}$	$\cdots$	π
S'		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	

以上より，台形の面積の最大値は，$\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{4}}$　$\left(\theta = \frac{2}{3}\pi\right)$