2章　微分の応用

§ 1　関数の変動　(p.19〜p.23)

BASIC

72　$y=f(x)$ とする．

（1）　$f'(x)=3x^2-2x$

よって

$f(2)=2^3-2^2=8-4=4$

$f'(2)=3\cdot 2^2-2\cdot 2=12-4=8$

したがって，$x=2$ における接線の方程式は

$$y-f(2)=f'(2)(x-2)$$

$$y-4=8(x-2)$$

$$\boldsymbol{y=8x-12}$$

（2）　$f'(x)=1\cdot e^x+x\cdot e^x=e^x(1+x)$

よって

$f(1)=1\cdot e^1=e$

$f'(1)=e^1(1+1)=2e$

したがって，$x=1$ における接線の方程式は

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)$$

$$y-e=2e(x-1)$$

$$\boldsymbol{y=2ex-e}$$

（3）　$f(x)=3x^{\frac{2}{3}}$

$f'(x)=3\cdot\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=2x^{-\frac{1}{3}}$

よって

$f(8)=3\cdot 8^{\frac{2}{3}}=3\cdot(2^3)^{\frac{2}{3}}=3\cdot 4=12$

$f'(8)=2\cdot 8^{-\frac{1}{3}}=2\cdot(2^3)^{-\frac{1}{3}}=2\cdot 2^{-1}=1$

したがって，$x=8$ における接線の方程式は

$$y-f(8)=f'(8)(x-8)$$

$$y-12=1(x-8)$$

$$\boldsymbol{y=x+4}$$

（4）　$f'(x)=\dfrac{(x^2+1)'}{x^2+1}=\dfrac{2x}{x^2+1}$

よって

$f(1)=\log(1^2+1)=\log 2$

$f'(1)=\dfrac{2\cdot 1}{1^2+1}=1$

したがって，$x=1$ における接線の方程式は

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)$$

$$y-\log 2=1(x-1)$$

$$\boldsymbol{y=x-1+\log 2}$$

73　$y=f(x)$ とする．

（1）　$f'(x)=3x^2-2$

よって

$f(1)=1^3-2\cdot 1=1-2=-1$

$f'(1)=3\cdot 1^2-2=1$

したがって，$x=1$ における法線の方程式は

$$y-f(1)=-\frac{1}{f'(1)}(x-1)$$

$$y-(-1)=-\frac{1}{1}(x-1)$$

$$y=-x+1-1$$

$$\boldsymbol{y=-x}$$

（2）　$f(x)=(x+1)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x)=\dfrac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}(x+1)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

よって

$f(3)=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$

$f'(3)=\dfrac{1}{2\sqrt{3+1}}=\dfrac{1}{2\cdot 2}=\dfrac{1}{4}$

したがって，$x=1$ における法線の方程式は

$$y-f(3)=-\frac{1}{f'(3)}(x-3)$$

$$y-2=-\frac{1}{\frac{1}{4}}(x-3)$$

$$y=-4(x-3)+2$$

$$\boldsymbol{y=-4x+14}$$

（3）　$f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 2x}\cdot(2x)'=\dfrac{2}{\cos^2 2x}$

よって

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\tan\pi=0$

$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2}{\cos^2\pi}=\dfrac{2}{(-1)^2}=2$

したがって，$x=\dfrac{\pi}{2}$ における法線の方程式は

$$y-f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y-0=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{y=-\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}}$$

74　$y=f(x)$ とする．

（1）　$f'(x)=3x^2+12$

$3x^2\geqq 0$ なので，$3x^2+12>0$

よって，すべての実数 x について，$f'(x)>0$ であるから，$f(x)$ は区間 I で単調に増加する．

（2）　$f'(x)=1-e^x$

区間 $(0,\ \infty)$ の x について

$e^x>1$

であるから

$1-e^x<0$

すなわち，$f'(x)<0$ であるから，$f(x)$ は区間 I で単調に減少する．

75（1）　$y'=2x-6$

$=2(x-3)$

$y'=0$ とすると，$x=3$

$x=3$ のときの y の値は

$y=3^2-6\cdot 3+9$

$=9-18+9=0$

y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y	↘	0	↗

よって

$x>3$ のとき　増加

$x<3$ のとき　減少

（2）　$y' = 4x^3 - 4x$

$= 4x(x^2-1) = 4x(x+1)(x-1)$

$y' = 0$ とすると，$x = 0,\ -1,\ 1$

$x = 0$ のときの y の値は

$y = 1$

$x = -1$ のときの y の値は

$y = (-1)^4 - 2\cdot(-1)^2 + 1$

$= 1 - 2 + 1 = 0$

$x = 1$ のときの y の値は

$y = 1^4 - 2\cdot 1^2 + 1$

$= 1 - 2 + 1 = 0$

y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	0	↗	1	↘	0	↗

よって

$-1 < x < 0,\ 1 < x$ のとき　増加

$x < -1,\ 0 < x < 1$ のとき　減少

（3）　$y' = 2xe^x + x^2e^x$

$= e^x x(2+x)$

$y' = 0$ とすると，$x = -2,\ 0$

$x = -2$ のときの y の値は

$y = (-2)^2e^{-2}$

$= \dfrac{4}{e^2}$

$x = 0$ のときの y の値は

$y = 0$

y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	0	↗

よって

$x < -2,\ 0 < x$ のとき　増加

$-2 < x < 0$ のとき　減少

76　$(f(x)+x^3)' = 0$ より，$f(x)+x^3$ は，定数関数なので，C を定数として

$f(x) + x^3 = C$

とおくことができる．これより

$f(x) = -x^3 + C$

ここで，$f(-1) = 1$ であるから

$-(-1)^3 + C = 1$，すなわち，$C = 1 - 1 = 0$

よって，$\boldsymbol{f(x) = -x^3}$

77（1）　$y' = 3x^2 - 12x + 9$

$= 3(x^2 - 4x + 3)$

$= 3(x-1)(x-3)$

$y' = 0$ とすると，$x = 1,\ 3$

$x = 1$ のときの y の値は

$y = 1^3 - 6\cdot 1^2 + 9\cdot 1 - 3$

$= 1 - 6 + 9 - 3 = 1$

$x = 3$ のときの y の値は

$y = 3^3 - 6\cdot 3^2 + 9\cdot 3 - 3$

$= 27 - 54 + 27 - 3 = -3$

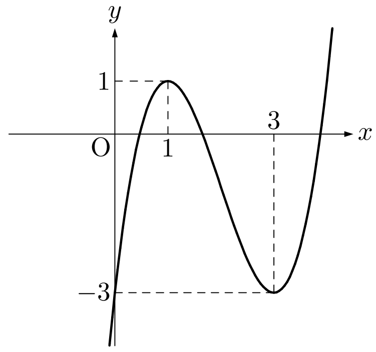
y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	1	↘	-3	↗

よって

極大値　$\boldsymbol{1}$　$\boldsymbol{(x = 1)}$

極小値　$\boldsymbol{-3}$　$\boldsymbol{(x = 3)}$



（2）　$y' = 4x^3 - 4$

$= 4(x^3 - 1)$

$= 4(x-1)(x^2+x+1)$

$y' = 0$ とすると，$x = 1$

※ $x^2 + x + 1 = 0$ は実数解をもたない．

$x = 1$ のときの y の値は

$y = 1^4 - 4\cdot 1$

$= 1 - 4 = -3$

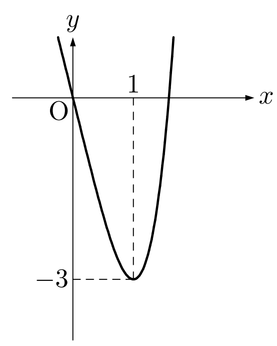
y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y	↘	-3	↗

よって

極大値　なし

極小値　$\boldsymbol{-3}$　$\boldsymbol{(x = 1)}$



（3）　$y' = 4x^3 - 12x^2$

$= 6x^2(x-3)$

$y' = 0$ とすると，$x = 0,\ 3$

$x = 0$ のときの y の値は

$y = 0$

$x = 3$ のときの y の値は

$y = 3^4 - 4\cdot 3^3$

$= 81 - 108 = -27$

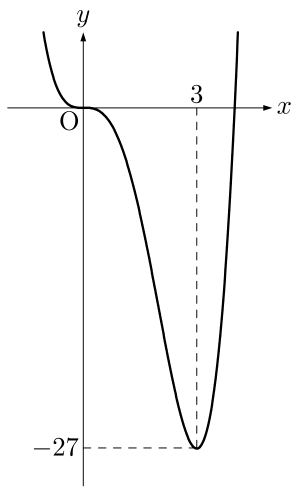
y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$-$	0	$+$
y	↘	0	↘	-27	↗

よって

極大値　なし

極小値　-27　$(x=3)$



78　$y'=3x^2-12$

$=3(x^2-4)$

$=3(x+2)(x-2)$

$y'=0$ とすると，$x=-2,\ 2$

$x=-2$ のときの y の値は

$y=(-2)^3-12\cdot(-2)-a$

$=-8+24-a=-a+16$

$x=2$ のときの y の値は

$y=2^3-12\cdot2-a$

$=8-24-a$

$=-a-16$

y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	$-a+16$	$\searrow$	$-a-16$	$\nearrow$

極大値は，$-a+16$，極小値は，$-a-16$ であるから，題意より

$$\begin{cases}-a+16>0 & \cdots① \\ -a-16>0 & \cdots②\end{cases}$$

① より，$a<16$，② より，$a<-16$ であるから

$\boldsymbol{a<-16}$

79（1）　$y'=3x^2-6x$

$=3x(x-2)$

$y'=0$ とすると，$x=0,\ 2$

$x=-1$ のときの y の値は

$y=(-1)^3-3\cdot(-1)^2+4$

$=-1-3+4=0$

$x=0$ のときの y の値は

$y=4$

$x=2$ のときの y の値は

$y=2^3-3\cdot2^2+4$

$=8-12+4=0$

$x=3$ のときの y の値は

$y=3^3-3\cdot3^2+4$

$=27-27+4=4$

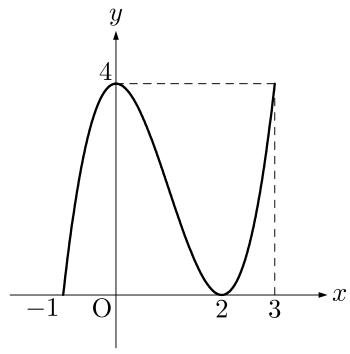
y の増減表は次のようになる．

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4

よって

最大値　4　$(x=0,\ 3)$

最小値　0　$(x=-1,\ 2)$



（2）　$y'=4x^3-12x+8$

$=4(x^3-3x+2)$

$=4(x+2)(x^2-2x+1)\quad=4(x+2)(x-1)^2$

$y'=0$ とすると，$x=-2,\ 1$

$x=-3$ のときの y の値は

$y=(-3)^4-6\cdot(-3)^2+8\cdot(-3)$

$=81-54-24=3$

$x=-2$ のときの y の値は

$y=(-2)^4-6\cdot(-2)^2+8\cdot(-2)$

$=16-24-16=-24$

$x=1$ のときの y の値は

$y=1^4-6\cdot1^2+8\cdot1$

$=1-6+8=3$

$x=2$ のときの y の値は

$y=2^4-6\cdot2^2+8\cdot2$

$=16-24+16=8$

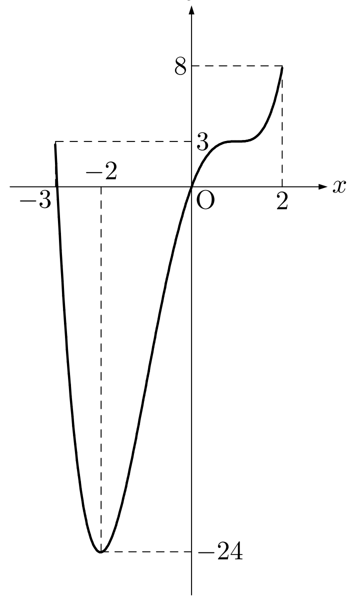
y の増減表は次のようになる．

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	2
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y	3	$\searrow$	-24	$\nearrow$	3	$\nearrow$	8

よって

最大値　8　$(x=2)$

最小値　-24　$(x=-2)$



（3）　$y'=\cos x-\sin x$

$y'=0$ とすると

$\cos x=\sin x$ より，$0\leqq x\leqq\pi$ において，$x=\dfrac{\pi}{4}$

$x=0$ のときの y の値は

$y=\sin0+\cos0=1$

$x = \frac{\pi}{4}$ のときの y の値は

$$y = \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$x = \pi$ のときの y の値は

$$y = \sin\pi + \cos\pi = -1$$

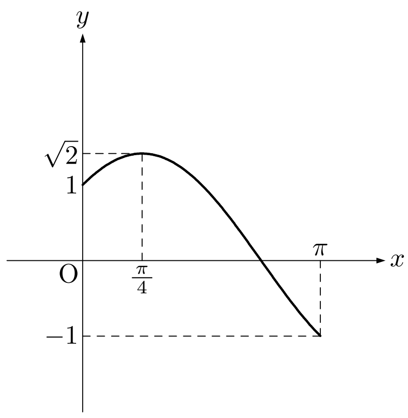
y の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	π
y'		$+$	0	$-$	
y	1	↗	$\sqrt{2}$	↘	-1

よって

最大値　$\boldsymbol{\sqrt{2}}$　$\left(\boldsymbol{x = \frac{\pi}{4}}\right)$

最小値　$\boldsymbol{-1}$　$(\boldsymbol{x = \pi})$



（4）　$y' = 4\cdot\frac{1}{x} - 2x$

$$= \frac{4-2x^2}{x}$$
$$= \frac{-2(x^2-2)}{x}$$
$$= \frac{-2(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}{x}$$

$y' = 0$ とすると，$1 \leqq x \leqq e$ において，$x = \sqrt{2}$

$x = 1$ のときの y の値は

$$y = 4\log 1 - 1^2$$
$$= 0 - 1 = -1$$

$x = \sqrt{2}$ のときの y の値は

$$y = 4\log\sqrt{2} - (\sqrt{2})^2$$
$$= 2\log(\sqrt{2})^2 - 2$$
$$= 2\log 2 - 2$$

$x = e$ のときの y の値は

$$y = 4\log e - e^2$$
$$= 4 - e^2$$

y の増減表は次のようになる．

x	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	e
y'		$+$	0	$-$	
y	-1	↗	$2\log 2 - 2$	↘	$4-e^2$

ここで，-1 と $4-e^2$ の大小関係について，$e \fallingdotseq 2.7$ より，

$$e^2 > 5$$

これより，$-e^2 < -5$

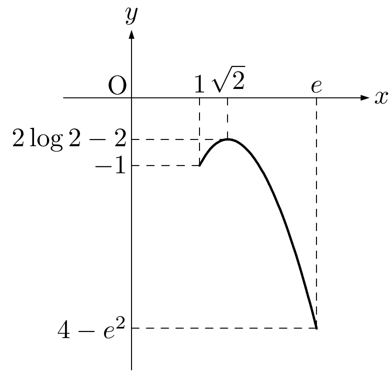
$$4 - e^2 < 4 - 5$$

すなわち，$4 - e^2 < -1$

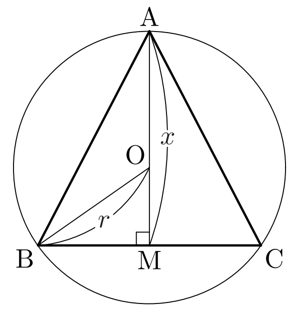
よって

最大値　$\boldsymbol{2\log 2 - 2}$　$(\boldsymbol{x = \sqrt{2}})$

最小値　$\boldsymbol{4 - e^2}$　$(\boldsymbol{x = e})$



80　図のように点を定める．



（1）　$\mathrm{OM} = |x - r|$ であるから，$\mathrm{BM} = l$ とおくと，$\triangle\mathrm{OBM}$ において三平方の定理より

$$l^2 + |x-r|^2 = r^2$$

すなわち，$l^2 = r^2 - (x-r)^2 \cdots$①

また，$\triangle\mathrm{ABC} = 3\sqrt{3}$ であるから，$\frac{1}{2}\cdot 2l\cdot x = 3\sqrt{3}$

これより

$$lx = 3\sqrt{3}$$
$$l = \frac{3\sqrt{3}}{x}$$
$$l^2 = \frac{27}{x^2}$$

これを ① に代入して

$$\frac{27}{x^2} = r^2 - (x-r)^2$$
$$= \{r + (x-r)\}\{r - (x-r)\}$$
$$= x(2r - x)$$
$$= 2rx - x^2$$

よって

$$2rx = x^2 + \frac{27}{x^2}$$
$$\boldsymbol{r = \frac{x}{2} + \frac{27}{2x^3}}\quad (x > 0)$$

（2）　$r' = \frac{1}{2} + \frac{27}{2}\cdot(-3x^{-4})$

$$= \frac{1}{2} - \frac{3^4}{2x^4}$$

$r' = 0$ とすると，$\frac{3^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$

これより，$x^3 = 3^3$，すなわち，$x = 3$

$x = 3$ のときの r の値は

$$r = \frac{3}{2} + \frac{27}{2\cdot 3^3}$$
$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

r の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	3	$\cdots$
r'	／	$-$	0	$+$
r	／	↘	2	↗

よって，$\boldsymbol{x = 3}$ のとき，r は最小となる．

81（1）　$y = x^3 - 2 - 3(x^2 - 2)$

$$= x^3 - 3x^2 + 4$$

とおく．

$$y' = 3x^2 - 6x$$
$$= 3x(x-2)$$

$y' = 0$ とすると，$x = 0,\ 2$

$x = 0$ のときの y の値は

$y = 4$

$x = 2$ のときの y の値は

$$y = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 4$$
$$= 8 - 12 + 4 = 0$$

y の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	0	$-$	0	$+$
y	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

よって，$x \geqq 0$ のとき，$x = 2$ で，最小値 0 をとるから

$y = x^3 - 3x^2 + 4 \geqq 0$

これより，$x^3 - 2 - 3(x^2 - 2) \geqq 0$ であるから

$\boldsymbol{x^3 - 2 \geqq 3(x^2 - 2)}$　$(x \geqq 0)$

（2）　$y = \log(1+x) - \left(x - \dfrac{1}{2}x^2\right)$

$$= \log(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$$

とおく．

$$y' = \frac{1}{1+x} - 1 + x$$
$$= \frac{1 - (1-x)(1+x)}{1+x}$$
$$= \frac{x^2}{1+x}$$

$y' = 0$ とすると，$x = 0$

$x = 0$ のときの y の値は

$y = \log(1+0) - 0 + 0 = 0$

y の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$
y'	0	$+$
y	0	$\nearrow$

よって，$x \geqq 0$ のとき，$x = 0$ で最小値 0 をとるから

$y = \log(1+x) - x + \dfrac{1}{2}x^2 \geqq 0$

これより，$\log(1+x) - \left(x - \dfrac{1}{2}x^2\right) \geqq 0$ であるから

$\boldsymbol{\log(1+x) \geqq x - \dfrac{1}{2}x^2}$　$(x \geqq 0)$

82（1）　$\dfrac{0}{0}$ の不定形である．

$$与式 = \lim_{x\to1} \frac{(x^3 - 2x^2 - 3x + 4)'}{(-x^3 + x^2 + 2x - 2)'}$$
$$= \lim_{x\to1} \frac{3x^2 - 4x - 3}{-3x^2 + 2x + 2}$$
$$= \frac{3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 3}{-3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 2}$$
$$= \frac{-4}{1} = \boldsymbol{-4}$$

〔別解〕

$$与式 = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(x^2 - x - 4)}{(x-1)(-x^2 + 2)}$$
$$= \lim_{x\to1} \frac{x^2 - x - 4}{-x^2 + 2}$$
$$= \frac{1^2 - 1 - 4}{-1^2 + 2}$$
$$= \frac{-4}{1} = \boldsymbol{-4}$$

（2）　$\dfrac{0}{0}$ の不定形である．

$$与式 = \lim_{x\to0} \frac{(\tan^{-1} x)'}{x'}$$
$$= \lim_{x\to0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1}$$
$$= \frac{1}{1+0} = \boldsymbol{1}$$

（3）　$\dfrac{0}{0}$ の不定形である．

$$与式 = \lim_{x\to0} \frac{\{\log(1+x^2)\}'}{x'}$$
$$= \lim_{x\to0} \frac{\frac{1}{1+x^2} \cdot 2x}{1}$$
$$= \lim_{x\to0} \frac{2x}{1+x^2}$$
$$= \frac{0}{1+0} = \boldsymbol{0}$$

（4）　$\dfrac{0}{0}$ の不定形である．

$$与式 = \lim_{x\to0} \frac{(e^{2x} - 1)'}{(3x)'}$$
$$= \lim_{x\to0} \frac{2e^{2x}}{3}$$
$$= \frac{2 \cdot 1}{3} = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

（5）　$\dfrac{0}{0}$ の不定形である．

$$与式 = \lim_{x\to0} \frac{(x \cos x)'}{(x - \sin 2x)'}$$
$$= \lim_{x\to0} \frac{\cos x + x(-\sin x)}{1 - \cos 2x \cdot 2}$$
$$= \lim_{x\to0} \frac{\cos x - x \sin x}{1 - 2\cos 2x}$$
$$= \frac{1 - 0}{1 - 2 \cdot 1} = \boldsymbol{-1}$$

83（1）　$\dfrac{0}{0}$ の不定形である．

$$与式 = \lim_{x\to1} \frac{(x^3 + x^2 - 5x + 3)'}{(-x^3 + x^2 + x - 1)'}$$
$$= \lim_{x\to1} \frac{3x^2 + 2x - 5}{-3x^2 + 2x + 1} \quad \left(まだ\ \frac{0}{0}\right)$$
$$= \lim_{x\to1} \frac{(3x^2 + 2x - 5)'}{(-3x^2 + 2x + 1)'}$$
$$= \lim_{x\to1} \frac{6x + 2}{-6x + 2}$$
$$= \frac{6+2}{-6+2} = \frac{8}{-4} = \boldsymbol{-2}$$

〔別解〕

$$与式 = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(x^2 + 2x - 3)}{(x-1)(-x^2 + 1)}$$
$$= \lim_{x\to1} \frac{x^2 + 2x - 3}{-x^2 + 1}$$
$$= \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(x+3)}{-(x-1)(x+1)}$$
$$= \lim_{x\to1} \frac{x+3}{-(x+1)}$$
$$= \frac{1+3}{-(1+1)}$$
$$= \frac{4}{-2} = \boldsymbol{-2}$$

（2）　$\dfrac{0}{0}$ の不定形である．

$$\text{与式} = \lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2x}\quad\left(\text{まだ}\quad\frac{0}{0}\right)$$
$$= \lim_{x\to0}\frac{(\sin x)'}{(2x)'} = \lim_{x\to0}\frac{\cos x}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

〔別解〕

$$\text{与式} = \lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}\cdot1 = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

〔別解〕

$$\text{与式} = \lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$
$$= \lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x} = 1^2\cdot\frac{1}{1+1} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

（3）　$\dfrac{0}{0}$ の不定形である．

$$\text{与式} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\{(2x-\pi)^2\}'}{(\sin x-1)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2(2x-\pi)\cdot2}{\cos x}\quad\left(\text{まだ}\quad\frac{0}{0}\right)$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\{4(2x-\pi)\}'}{(\cos x)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{8}{-\sin x} = \frac{8}{-1} = \boldsymbol{-8}$$

（4）　$\dfrac{0}{0}$ の不定形である．

$$\text{与式} = \lim_{x\to0}\frac{(e^{2x}-2x-1)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to0}\frac{2e^{2x}-2}{2x}\quad\left(\text{まだ}\quad\frac{0}{0}\right)$$
$$= \lim_{x\to0}\frac{(2e^{2x}-2)'}{(2x)'} = \lim_{x\to0}\frac{4e^{2x}}{2} = \frac{4\cdot1}{2} = \boldsymbol{2}$$

84（1）　$\dfrac{\infty}{-\infty}$ の不定形である．

$$\text{与式} = \lim_{x\to\infty}\frac{(2x^3-3x+1)'}{(-x^3-2x^2+4)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{6x^2-3}{-3x^2-4x}\quad\left(\text{まだ}\quad\frac{\infty}{-\infty}\right)$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(6x^2-3)'}{(-3x^2-4x)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{12x}{-6x-4}\quad\left(\text{まだ}\quad\frac{\infty}{-\infty}\right)$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(12x)'}{(-6x-4)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{12}{-6} = \boldsymbol{-2}$$

〔別解〕

$$\text{与式} = \lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{-1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^3}} = \frac{2-0+0}{-1-0+0} = \boldsymbol{-2}$$

（2）　$-x=t$ とおけば，$x\to-\infty$ のとき，$t\to\infty$ であるから

$$\text{与式} = \lim_{t\to\infty}\frac{\log|-t|}{-t}$$

$\dfrac{\infty}{-\infty}$ の不定形である．

$$\text{与式} = \lim_{t\to\infty}\frac{\log|t|}{-t} = \lim_{t\to\infty}\frac{(\log|t|)'}{(-t)'} = \lim_{t\to\infty}\frac{\dfrac{1}{t}}{-1} = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{t}\right) = \boldsymbol{0}$$

85（1）

$$\lim_{x\to\infty}f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}\quad\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x'}{(e^x)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = \boldsymbol{0}$$

$-x=t$ とおくと

$$\lim_{x\to-\infty}f(x) = \lim_{t\to\infty}(-t)e^{-(-t)} = \lim_{t\to\infty}(-te^t) = \boldsymbol{-\infty}$$

（2）

$$f'(x) = e^{-x}-xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$$

$y'=0$ とすると，$x=1$

$x=1$ のときの y の値は

$$y = 1\cdot e^{-1} = \frac{1}{e}$$

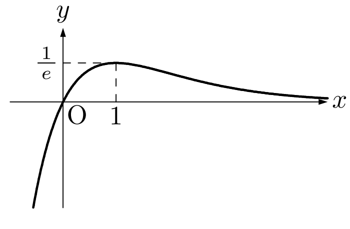
y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

よって

極大値　$\boldsymbol{\dfrac{1}{e}}$　$(\boldsymbol{x=1})$

極小値　なし



CHECK

86　$y=f(x)$ とする．

（1）　$f'(x)=-3x^2+9$

よって

$f(2)=-2^3+9\cdot 2+2=-8+18+2=12$

$f'(2)=-3\cdot 2^2+9=-12+9=-3$

したがって，$x=2$ における接線の方程式は

$y-f(2)=f'(2)(x-2)$

$y-12=-3(x-2)$

$\boldsymbol{y=-3x+18}$

（2）　$f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

よって

$f(\pi)=\dfrac{\sin\pi}{\pi}=0$

$f'(\pi)=\dfrac{\pi\cos\pi-\sin\pi}{\pi^2}=\dfrac{-\pi}{\pi^2}=-\dfrac{1}{\pi}$

したがって，$x=1$ における接線の方程式は

$y-f(\pi)=f'(\pi)(x-\pi)$

$y-0=-\dfrac{1}{\pi}(x-\pi)$

$\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{\pi}x+1}$

87　$y=f(x)$ とする．

（1）　$f'(x)=-3x^2+2$

よって

$f(1)=-1^3+2\cdot 1=-1+2=1$

$f'(1)=-3\cdot 1^2+2=-3+2=-1$

したがって，$x=1$ における法線の方程式は

$y-f(1)=-\dfrac{1}{f'(1)}(x-1)$

$y-1=-\dfrac{1}{-1}(x-1)$

$y=x-1+1$

$\boldsymbol{y=x}$

（2）　$f'(x)=\log x+x\cdot\dfrac{1}{x}=\log x+1$

よって

$f(e)=e\log e=e$

$f'(e)=\log e+1=1+1=2$

したがって，$x=1$ における法線の方程式は

$y-f(e)=-\dfrac{1}{f'(e)}(x-e)$

$y-e=-\dfrac{1}{2}(x-e)$

$y=-\dfrac{1}{2}(x-e)+e$

$\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}e}$

88　$(f(x)+x^4)'=0$ より，$f(x)+x^4$ は，定数関数なので，C を定数として

$f(x)+x^4=C$

とおくことができる．これより

$f(x)=-x^4+C$

ここで，$f(-2)=-12$ であるから

$-(-2)^4+C=-12$，すなわち，$C=-12+16=4$

よって，$\boldsymbol{f(x)=-x^4+4}$

89（1）　$y'=3x^2-3$

$=3(x^2-1)$

$=3(x+1)(x-1)$

$y'=0$ とすると，$x=-1,\ 1$

$x=-1$ のときの y の値は

$y=(-1)^3-3\cdot(-1)+1$

$=-1+3+1=3$

$x=1$ のときの y の値は

$y=1^3-3\cdot 1+1$

$=1-3+1=-1$

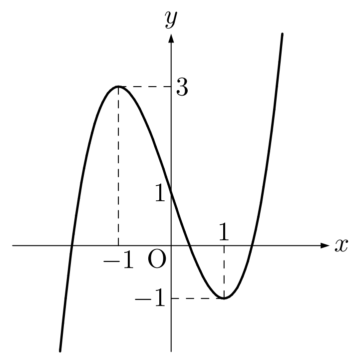
y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	3	↘	-1	↗

よって

極大値　3　$(x=-1)$

極小値　-1　$(x=1)$



（2）　$y'=2\sin x\cos x$

$y'=0$ とすると，$\sin x=0$，$\cos x=0$

$\sin x=0$ より，$x=\pi$

$\cos x=0$ より，$x=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi$

$x=\dfrac{\pi}{2}$ のときの y の値は

$y=\sin^2\dfrac{\pi}{2}=1^2=1$

$x=\pi$ のときの y の値は

$y=\sin^2\pi=0$

$x=\dfrac{3}{2}\pi$ のときの y の値は

$y=\sin^2\dfrac{3}{2}\pi=(-1)^2=1$

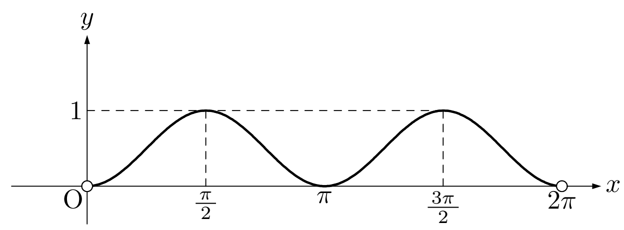
y の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{3\pi}{2}$	$\cdots$	2π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y		↗	1	↘	0	↗	1	↘	

よって

極大値　1　$\left(x=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi\right)$

極小値　0　$(x=\pi)$



90　$y'=-3x^2+6x$

$=-3x(x-2)$

$y'=0$ とすると，$x=0,\ 2$

$x=0$ のときの y の値は

$y = -a$

$x = 2$ のときの y の値は

$$y = -2^3 + 3 \cdot 2^2 - a$$
$$= -8 + 12 - a$$
$$= -a + 4$$

y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	$-a$	↗	$-a+4$	↘

極大値は，$-a+4$，極小値は，$-a$ であるから，題意より

$$\begin{cases} -a + 4 < 0 & \cdots ① \\ -a < 0 & \cdots ② \end{cases}$$

① より，$a > 4$，② より，$a > 0$ であるから

$\boldsymbol{a > 4}$

91　$y' = 4x^3 - 12x^2 + 8x$

$$= 4x(x^2 - 3x + 2)$$
$$= 4x(x-1)(x-2)$$

$y' = 0$ とすると，$x = 0,\ 1,\ 2$

$x = -1$ のときの y の値は

$$y = (-1)^4 - 4 \cdot (-1)^3 + 4 \cdot (-1)^2$$
$$= 1 + 4 + 4 = 9$$

$x = 0$ のときの y の値は

$$y = 0$$

$x = 1$ のときの y の値は

$$y = 1^4 - 4 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1^2$$
$$= 1 - 4 + 4 = 1$$

$x = 2$ のときの y の値は

$$y = 2^4 - 4 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2$$
$$= 16 - 32 + 16 = 0$$

$x = 3$ のときの y の値は

$$y = 3^4 - 4 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^2$$
$$= 81 - 108 + 36 = 9$$

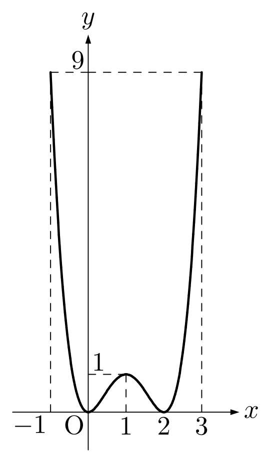
y の増減表は次のようになる．

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	9	↘	0	↗	1	↘	0	↗	9

よって

最大値　9　($\boldsymbol{x = -1,\ 3}$)

最小値　0　($\boldsymbol{x = 1,\ 2}$)



92（1）　底面の円の半径を r とすると，$r^2 + x^2 = 3^2$ より，$r = \sqrt{9 - x^2}$

よって

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \times (x+3)$$
$$= \frac{1}{3}\pi(\sqrt{9-x^2})^2 \times (x+3)$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}\pi(9-x^2)(x+3)}$$

高さが 3 以上であるから，$x + 3 \geqq 3$ より，$x \geqq 0$

また，$9 - x^2 > 0$ より，$-3 < x < 3$

したがって，定義域は，$0 \leqq x < 3$

（2）　$V' = \frac{1}{3}\pi\{-2x(x+3) + (9-x^2) \cdot 1\}$

$$= \frac{1}{3}\pi(-2x^2 - 6x + 9 - x^2)$$
$$= \frac{1}{3}\pi(-3x^2 - 6x + 9)$$
$$= -\pi(x^2 + 2x - 3)$$
$$= -\pi(x+3)(x-1)$$

$0 \leqq x < 3$ において，$V' = 0$ となるのは，$x = 1$ のときである．

$x = 0$ のときの V の値は

$$V = \frac{1}{3}\pi(9 - 0^2)(0+3)$$
$$= \frac{1}{3}\pi \cdot 27 = 9\pi$$

$x = 1$ のときの V の値は

$$V = \frac{1}{3}\pi(9 - 1^2)(1+3)$$
$$= \frac{1}{3}\pi \cdot 32 = \frac{32}{3}\pi$$

V の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
V'		$+$	0	$-$	
V	9π	↗	$\frac{32\pi}{3}$	↘	

よって，V は $\boldsymbol{x = 1}$ のとき最大となる．$\left(\text{最大値は，}\frac{32}{3}\pi\right)$

93　$y = e^{2x} - (2x+1)$

$$= e^{2x} - 2x - 1$$

とおく．

$$y' = e^{2x} \cdot 2 - 2$$
$$= 2(e^{2x} - 1)$$

$y' = 0$ とすると，$e^{2x} = 1$ より，$x = 0$

$x = 0$ のときの y の値は

$$y = e^0 - 2 \cdot 0 - 1$$
$$= 1 - 1 = 0$$

y の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$
y'	0	$+$
y	0	↗

よって，$x \geqq 0$ のとき，$x = 0$ で，最小値 0 をとるから

$$y = e^{2x} - 2x - 1 \geqq 0$$

これより，$e^{2x} - (2x+1) \geqq 0$ であるから

$\boldsymbol{e^{2x} \geqq 2x + 1}$　$(x \geqq 0)$

94（1）　$\frac{0}{0}$ の不定形である．

$$与式 = \lim_{x\to1} \frac{(-x^3+2x^2-x)'}{(2x^3+x^2+2x-5)'}$$
$$= \lim_{x\to1} \frac{-3x^2+4x-1}{6x^2+2x+2}$$
$$= \frac{-3+4-1}{6+2+2} = \frac{0}{10} = \mathbf{0}$$

〔別解〕

$$与式 = \lim_{x\to1} \frac{-x(x-1)^2}{(x-1)(2x^2+3x+5)}$$
$$= \lim_{x\to1} \frac{-x(x-1)}{2x^2+3x+5}$$
$$= \frac{-1(1-1)}{2\cdot1^2+3\cdot1+5}$$
$$= \frac{0}{10} = \mathbf{0}$$

（2）　$\dfrac{0}{0}$ の不定形である．

$$与式 = \lim_{x\to0} \frac{(2\cos x-2+x^2)'}{(x^4)'}$$
$$= \lim_{x\to0} \frac{-2\sin x+2x}{4x^3} \quad \left(まだ\ \frac{0}{0}\right)$$
$$= \lim_{x\to0} \frac{(-\sin x+x)'}{(2x^3)'}$$
$$= \lim_{x\to0} \frac{-\cos x+1}{6x^2} \quad \left(まだ\ \frac{0}{0}\right)$$
$$= \lim_{x\to0} \frac{(-\cos x+1)'}{(6x^2)'}$$
$$= \lim_{x\to0} \frac{\sin x}{12x}$$
$$= \lim_{x\to0} \frac{1}{12}\cdot\frac{\sin x}{x}$$
$$= \frac{1}{12}\cdot1 = \mathbf{\frac{1}{12}}$$

（3）

$$与式 = \lim_{x\to+0} \sqrt{x}\log x$$
$$= \lim_{x\to+0} \frac{\log x}{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$
$$= \lim_{x\to+0} \frac{\log x}{x^{-\frac{1}{2}}} \quad \left(\frac{-\infty}{\infty}\right)$$
$$= \lim_{x\to+0} \frac{(\log x)'}{(x^{-\frac{1}{2}})'}$$
$$= \lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}$$
$$= -\lim_{x\to+0} \frac{2}{x^{-\frac{1}{2}}}$$
$$= -\lim_{x\to+0} 2\sqrt{x} = \mathbf{0}$$

95（1）

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x'}{(e^{\frac{x^2}{2}})'}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{\frac{x^2}{2}}\cdot x} = \mathbf{0}$$

$-x=t$ とおくと

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{t\to\infty} (-t)e^{-\frac{(-t)^2}{2}}$$
$$= \lim_{t\to\infty} (-te^{-\frac{t^2}{2}})$$
$$= -\lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{\frac{t^2}{2}}} = \mathbf{0}$$

（2）

$$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} + xe^{-\frac{x^2}{2}}\cdot(-x)$$
$$= e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2)$$
$$= e^{-\frac{x^2}{2}}(1+x)(1-x)$$

$y'=0$ とすると，$x=\pm1$

$x=-1$ のときの y の値は

$$y = -1\cdot e^{-\frac{1}{2}}$$
$$= -\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{e}}$$

$x=1$ のときの y の値は

$$y = 1\cdot e^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

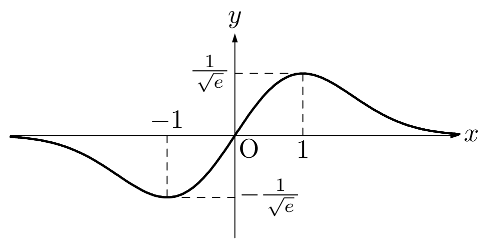
y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	$-\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\searrow$

よって

極大値　$\mathbf{\dfrac{1}{\sqrt{e}}}$　$\mathbf{(x=1)}$

極小値　$\mathbf{-\dfrac{1}{\sqrt{e}}}$　$\mathbf{(x=-1)}$

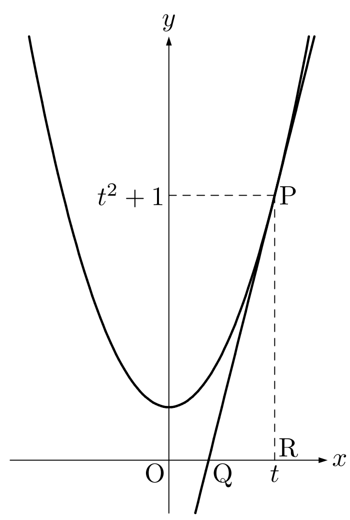


STEP UP

96（1）　$y'=2x$ であるから，点 P における接線の方程式は

$$y-(t^2+1) = 2t(x-t)$$

整理すると，$y=2tx-t^2+1$



点 Q の x 座標は，$y=2tx-t^2+1$ において，$y=0$ として

$$0 = 2tx-t^2+1$$
$$2tx = t^2-1$$
$$x = \frac{t^2-1}{2t}$$

これより

$$QR = t-\frac{t^2-1}{2t}$$
$$= \frac{2t^2-(t^2-1)}{2t} = \frac{t^2+1}{2t}$$

また，PR $=t^2+1$ であるから

$$S = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{QR}\cdot\mathrm{PR}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{t^2+1}{2t}\cdot(t^2+1)$$
$$= \boldsymbol{\frac{(t^2+1)^2}{4t}} \quad (t>0)$$

（2）
$$S' = \frac{1}{4}\cdot\frac{\{(t^2+1)^2\}'\cdot t-(t^2+1)^2\cdot(t)'}{t^2}$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{2(t^2+1)\cdot 2t\cdot t-(t^2+1)^2\cdot 1}{t^2}$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{4t^2(t^2+1)-(t^2+1)^2}{t^2}$$
$$= \frac{(t^2+1)\{4t^2-(t^2+1)\}}{4t^2}$$
$$= \frac{(t^2+1)(3t^2-1)}{4t^2}$$

$t>0$ において，$S'=0$ となるのは，$3t^2-1=0$ より，$t=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$t=\frac{1}{\sqrt{3}}$ のときの S の値は

$$S = \frac{\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right\}^2}{4\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}$$
$$= \frac{\left(\frac{1}{3}+1\right)^2}{\frac{4}{\sqrt{3}}} = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2}{\frac{4}{\sqrt{3}}}$$
$$= \frac{\frac{16}{9}}{\frac{4}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{16}{9}\times 9\sqrt{3}}{\frac{4}{\sqrt{3}}\times 9\sqrt{3}}$$
$$= \frac{16\sqrt{3}}{36} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

S の増減表は次のようになる．

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
S'		$-$	0	$+$
S		↘	$\frac{4\sqrt{3}}{9}$	↗

よって，S は $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，最小となる．

このとき，S の最小値は $\boldsymbol{\frac{4\sqrt{3}}{9}}$ $\left(t=\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

97（1）
$$y = e^x-(1+x)$$
$$= e^x-x-1$$

とおく．

$$y' = e^x-1$$

$y'=0$ とすると，$e^x=1$ より，$x=0$

$x=0$ のときの y の値は

$$y = e^0+0-1$$
$$= 1-1=0$$

y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y	↘	0	↗

よって，$x=0$ で，最小値 0 をとるから，$x\neq 0$ のとき，

$$y=e^x-x-1>0$$

これより，$e^x-(1+x)>0$ であるから

$\boldsymbol{e^x>1+x}$ $(x\neq 0)$

（2）
$$y = e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)$$
$$= e^x-\frac{x^2}{2}-x-1$$

とおく．

$$y' = e^x-x-1$$

ここで，(1) より，$x\neq 0$ のとき，$e^x-x-1>0$ であるから，y の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$
y'		$+$
y	0	↗

よって，$x\geqq 0$ のとき，$x=0$ で最小値 0 をとるから，$x>0$ において

$$y=e^x-\frac{x^2}{2}-x-1>0$$

これより，$e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)>0$ であるから

$\boldsymbol{e^x>1+x+\frac{x^2}{2}}$ $(x>0)$

98
$$f'(x) = (1+\cos x)'\sin x+(1+\cos x)(\sin x)'$$
$$= -\sin^2 x+\cos x(1+\cos x)$$
$$= -(1-\cos^2 x)+\cos x+\cos^2 x$$
$$= 2\cos^2 x+\cos x-1$$
$$= (2\cos x-1)(\cos x+1)$$

$f'(x)=0$ とすると，$\cos x=\frac{1}{2}$，$\cos x=-1$

$\cos x=\frac{1}{2}$ より，$x=\frac{\pi}{3}$，$\frac{5}{3}\pi$

$\cos x=-1$ より，$x=\pi$

$x=0$ のときの y の値は

$$y=(1+\cos 0)\sin 0=0$$

$x=\frac{\pi}{3}$ のときの y の値は

$$y=\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$x=\pi$ のときの y の値は

$$y=(1+\cos\pi)\sin\pi$$
$$=(1-1)\cdot 1=0$$

$x=\frac{5}{3}\pi$ のときの y の値は

$$y=\left(1+\cos\frac{5}{3}\pi\right)\sin\frac{5}{3}\pi$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$x=2\pi$ のときの y の値は

$$y=(1+\cos 2\pi)\sin 2\pi=0$$

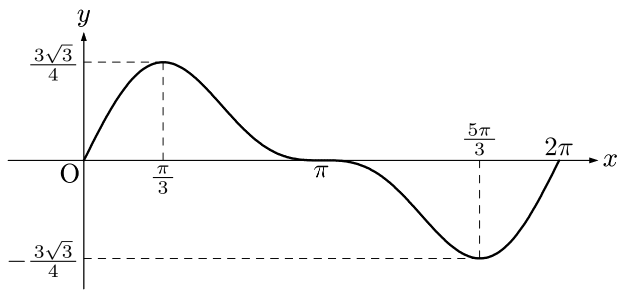
$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5\pi}{3}$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	0	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	0

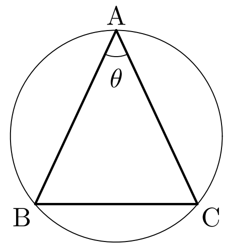
よって

極大値 $\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{4}}$ $\left(\boldsymbol{x=\frac{\pi}{3}}\right)$

極小値 $\boldsymbol{-\frac{3\sqrt{3}}{4}}$ $\left(\boldsymbol{x=\frac{5}{3}\pi}\right)$



99（1）　円の半径を R，二等辺三角形の頂角を A とし，各頂点を図のように定める．



$$S = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin\theta \quad (0<\theta<\pi)\cdots①$$

正弦定理より，$\dfrac{\mathrm{AC}}{\sin B} = 2R$

ここで，$\angle\mathrm{B} = \dfrac{\pi-\theta}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\theta}{2}$ であるから

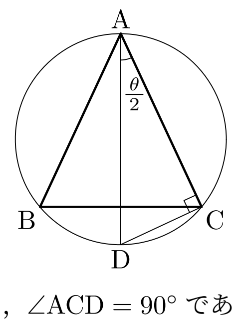
$$\begin{aligned}\mathrm{AC} &= 2R\cdot\sin B\\ &= 2\cdot1\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\\ &= 2\cos\frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

また，AB = AC であるから，これと ① より

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^2\sin\theta\\ &= 2\sin\theta\cos^2\frac{\theta}{2}\\ &= 2\sin\theta\cdot\frac{1+\cos\theta}{2}\\ &= \boldsymbol{\sin\theta(1+\cos\theta)} \quad (0<\theta<\pi)\end{aligned}$$

〔AC の求め方の別解〕

頂角 A の二等分線と円周との交点を D とすると，線分 AD は円の直径となる．（証明略）



△ACD において，$\angle\mathrm{ACD} = 90^\circ$ であるから

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AD}} = \frac{\mathrm{AC}}{2}$$

これより，$\mathrm{AC} = 2\cos\dfrac{\theta}{2}$

（2）

$$\begin{aligned}S' &= (\sin\theta)'(1+\cos\theta) + \sin\theta(1+\cos\theta)'\\ &= \cos\theta(1+\cos\theta) + \sin\theta(-\sin\theta)\\ &= \cos\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta\\ &= \cos\theta + \cos^2\theta - (1-\cos^2\theta)\\ &= 2\cos^2\theta + \cos\theta - 1\\ &= (2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)\end{aligned}$$

$0<\theta<\pi$ において，$S'=0$ となるのは，$2\cos\theta - 1 = 0$ より，$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$，すなわち，$\theta = \dfrac{\pi}{3}$

S の増減表は次のようになる．

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
S'		$+$	0	$-$	
S		↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	

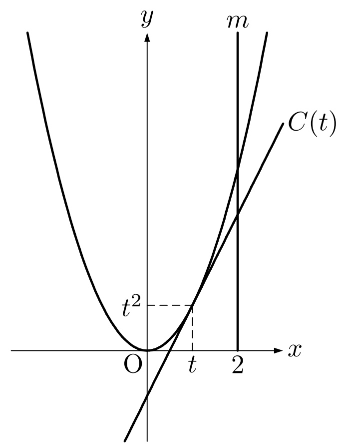
よって，S は $\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{3}}$ のとき，最大となる．

このとき，S の最大値は $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

100（1）　$y' = 2x$ であるから，点 $(t,\ t^2)$ における接線の方程式は

$$y - t^2 = 2t(x-t)$$

整理すると，$\boldsymbol{y = 2tx - t^2}$



（2）　$C(t)$ と m が交点をもつためには，$C(t)$ が $x=2$ において $y>0$ となればよい．

$y = 2tx - t^2$ において，$x=2$ とすると

$$\begin{aligned}y &= 2t\cdot2 - t^2\\ &= -t^2 + 4t\end{aligned}$$

これより，$-t^2+4t>0$

これを解くと

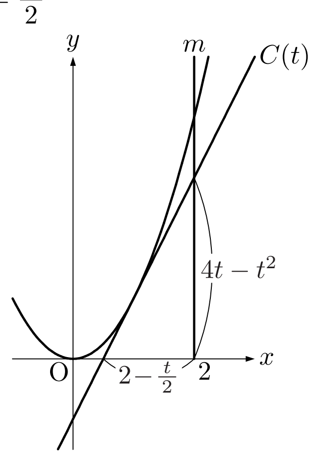
$$t(t-4)<0$$

すなわち，$\boldsymbol{0<t<4}$

（3）　$C(t)$ と x 軸との交点は，$y = 2tx - t^2$ において，$y=0$ とすれば

$$0 = 2tx - t^2$$
$$2tx = t^2$$

$t \fallingdotseq 0$ より，$x = \dfrac{t}{2}$



よって

$$S(t) = \frac{1}{2}\left(2-\frac{t}{2}\right)(4t-t^2)$$

これより

$$S'(t) = \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{2}(4t-t^2) + \left(2-\frac{t}{2}\right)(4-2t)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{2}t(4-t) + (4-t)(2-t)\right\}$$
$$= \frac{1}{4}(4-t)\{-t+2(2-t)\}$$
$$= \frac{1}{4}(4-t)(4-3t) = \frac{1}{4}(t-4)(3t-4)$$

$0 < t < 4$ において，$S(t) = 0$ となるのは，$t = \frac{4}{3}$

$t = \frac{4}{3}$ のときの $S(t)$ の値は

$$S\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(2-\frac{2}{3}\right)\left(4\cdot\frac{4}{3} - \frac{16}{9}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{32}{9} = \frac{64}{27}$$

$S(t)$ の増減表は次のようになる．

t	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	4
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		↗	$\frac{64}{27}$	↘	

よって，$S(t)$ は $t = \frac{4}{3}$ のとき，最大となる．

このとき，$S(t)$ の最大値は $\boldsymbol{\frac{64}{27}}$　$\left(t = \frac{4}{3}\right)$

101　$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ とおくと，$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$x = 1,\ 3$ において，極値をとるので，$f'(1) = f'(3) = 0$

$f'(1) = 0$ より，$3 + 2a + b = 0 \cdots ①$

$f'(3) = 0$ より，$27 + 6a + b = 0 \cdots ②$

② − ① より，$24 + 4a = 0$，すなわち，$a = -6$

これを ① に代入して，$3 - 12 + b = 0$，これより，$b = 9$

したがって，極大値と極小値の差は

$$f(1) - f(3) = (1 + a + b + c) - (27 + 9a + 3b + c)$$
$$= -26 - 8a - 2b$$
$$= -26 - 8\cdot(-6) - 2\cdot 9$$
$$= -26 + 48 - 18 = 48 - 44 = \mathbf{4}$$

〔a，b の求め方の別解〕

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ で，$x = 1,\ 3$ で極値をとることから，$3x^2 + 2ax + b = 0$ は $x = 1,\ 3$ を解にもつ．

よって，$3x^2 + 2ax + b = 3(x-1)(x-3)$ と因数分解でき，これは恒等式となる．

右辺 $= 3(x^2 - 4x + 3) = 3x^2 - 12x + 9$ であるから

$3x^2 + 2ax + b = 3x^2 - 12x + 9$

両辺の係数と比較して

$$\begin{cases} 2a = -12 \\ b = 9 \end{cases}$$

したがって，$a = -6$，$b = 9$

102（1）　$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ であるから，題意より

$f(1) = -5,\quad f'(1) = 0$

$f(1) = -5$ より，$1 + a + b = -5 \cdots ①$

$f'(1) = 0$ より，$3 + 2a + b = 0 \cdots ②$

② − ① より，$2 + a = 5$，すなわち，$a = 3$

これを ① に代入して，$1 + 3 + b = -5$，これより，$b = -9$

よって，$\boldsymbol{a = 3,\ b = -9}$

（2）　（1）より

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$$
$$= 3(x^2 + 2x - 3)$$
$$= 3(x+3)(x-1)$$

$f(x) = 0$ となるのは，$x = -3,\ 1$

$x = -3$ のときの $f(x)$ の値は

$$f(-3) = (-3)^3 + 3\cdot(-3)^2 - 9\cdot(-3)$$
$$= -27 + 27 + 27 = 27$$

$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	27	↘	-5	↗

よって，$f(x)$ の極大値は，$\mathbf{27}$　$(x = -3)$

103　$y = \log x$ より，$y' = \frac{1}{x}$

曲線上の接点の座標を $(t,\ \log t)$ とすると，接線の方程式は

$y - \log t = \frac{1}{t}(x - t)$

整理すると，$y = \frac{1}{t}x - 1 + \log t$

この接線が $(0,\ 0)$ を通るので，$0 = -1 + \log t$

これより，$\log t = 1$ であるから，$t = e$

よって，接線の方程式は，$y = \frac{1}{e}x - 1 + \log e$

すなわち，$\boldsymbol{y = \frac{1}{e}x}$

104　$y = -x^2 + 2x$ より，$y' = -2x + 2$

曲線上の接点の座標を $(t,\ -t^2 + 2t)$ とすると，接線の方程式は

$y - (-t^2 + 2t) = (-2t + 2)(x - t)$

整理すると，$y = (-2t + 2)x + t^2$

この接線が $(0,\ c)$ を通るので，$c = t^2$

$c > 0$ より，$t = \pm\sqrt{c}$

$t = \sqrt{c}$ のときの接線の傾きは，$-2t + 2 = -2\sqrt{c} + 2$

$t = -\sqrt{c}$ のときの接線の傾きは，$-2t + 2 = 2\sqrt{c} + 2$

2 本の接線が垂直なので

$(-2\sqrt{c} + 2)(2\sqrt{c} + 2) = -1$

$-4c + 4 = -1$

$4c = 5$

よって，$\boldsymbol{c = \frac{5}{4}}$

105　※ $a > 0$ とし，$e^{\log a} = x$ とおく．

対数の定義より，$\log x = \log a$ であるから，$x = a$

よって，$\boldsymbol{a = e^{\log a}}$

（1）　$y = \sqrt[x]{x}$ とおくと，$\log y = \log\sqrt[x]{x} = \log x^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\log x$

$$\lim_{x\to\infty}\log y = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\log x$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)'}{(x)'}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$$

よって

$$\lim_{x\to\infty}y = \lim_{x\to\infty}e^{\log y}$$
$$= e^0 = \mathbf{1}$$

（2）　$y = (1 + e^x)^{\frac{1}{x}}$ とおくと

$$\log y = \log(1 + e^x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\log(1 + e^x)$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\log y &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\log(1+e^x)\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+e^x)}{x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\{\log(1+e^x)\}'}{(x)'}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{(1+e^x)}\cdot(1+e^x)'}{1}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1+e^x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{(e^x)'}{(1+e^x)'}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x} = \lim_{x\to\infty}1 = 1
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} y &= \lim_{x\to\infty} e^{\log y}\\
&= e^1 = \boldsymbol{e}
\end{aligned}$$