1章　微分法

§2　いろいろな関数の導関数 (p.43〜p.44)

練習問題 2-A

1. (1) $y' = -\dfrac{\{(e^{2x}+1)^3\}'}{\{(e^{2x}+1)^3\}^2}$

$= -\dfrac{3(e^{2x}+1)^2 \cdot (e^{2x}+1)'}{(e^{2x}+1)^6}$

$= -\dfrac{3(e^{2x}+1)^2 \cdot (e^{2x}) \cdot (2x)'}{(e^{2x}+1)^6}$

$= -\dfrac{6e^{2x}(e^{2x}+1)^2}{(e^{2x}+1)^6}$

$= \boldsymbol{-\dfrac{6e^{2x}}{(e^{2x}+1)^4}}$

(2) $y' = -\dfrac{\{\sin^4(1-2x)\}'}{\{\sin^4(1-2x)\}^2}$

$= -\dfrac{4\sin^3(1-2x) \cdot \{\sin(1-2x)\}'}{\sin^8(1-2x)}$

$= -\dfrac{4\sin^3(1-2x)\cos(1-2x) \cdot (1-2x)'}{\sin^8(1-2x)}$

$= \dfrac{8\sin^3(1-2x)\cos(1-2x)}{\sin^8(1-2x)}$

$= \boldsymbol{\dfrac{8\cos(1-2x)}{\sin^5(1-2x)}}$

(3) $y' = x'\sqrt{x^2+1} + x(\sqrt{x^2+1})'$

$= \sqrt{x^2+1} + x \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot (x^2+1)'$

$= \sqrt{x^2+1} + \dfrac{x}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x$

$= \sqrt{x^2+1} + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$

$= \dfrac{(x^2+1)+x^2}{\sqrt{x^2+1}}$

$= \boldsymbol{\dfrac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}}$

(4) $y' = 2\log x \cdot (\log x)'$

$= 2\log x \cdot \dfrac{1}{x}$

$= \boldsymbol{\dfrac{2\log x}{x}}$

(5) $y' = \dfrac{1}{\log x} \cdot (\log x)'$

$= \dfrac{1}{\log x} \cdot \dfrac{1}{x}$

$= \boldsymbol{\dfrac{1}{x\log x}}$

2. (1) $y = \sin^{-1}\dfrac{1}{2}$ とおくと

$\sin y = \dfrac{1}{2} \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから

$y = \dfrac{\pi}{6}$

よって

与式 $= \sin\dfrac{\pi}{6} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(2) $\sin\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから

与式 $= \sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$y = \sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ とおくと

$\sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから

$y = \dfrac{\pi}{3}$

よって，与式 $= \boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}}$

3. (1) $y' = \dfrac{1}{1+(\sin x)^2} \cdot (\sin x)'$

$= \dfrac{1}{1+\sin^2 x} \cdot \cos x$

$= \boldsymbol{\dfrac{\cos x}{1+\sin^2 x}}$

(2) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(\cos x)^2}} \cdot (\cos x)' + 1$

$= \dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} \cdot (-\sin x) + 1$

$= -\dfrac{\sin x}{\sqrt{\sin^2 x}} + 1$

$= -\dfrac{\sin x}{\sin x} + 1 \quad (\sin x \geqq 0)$

$= -1 + 1 = \mathbf{0}$

4. (1) 左辺 $= \dfrac{1}{2a}(\log|x-a| - \log|x+a|)'$

$= \dfrac{1}{2a}\left(\dfrac{1}{x-a} \cdot (x-a)' - \dfrac{1}{x+a} \cdot (x+a)'\right)$

$= \dfrac{1}{2a}\left(\dfrac{1}{x-a} - \dfrac{1}{x+a}\right)$

$= \dfrac{1}{2a} \cdot \dfrac{(x+a)-(x-a)}{(x-a)(x+a)}$

$= \dfrac{1}{2a} \cdot \dfrac{2a}{x^2-a^2}$

$= \dfrac{1}{x^2-a^2} =$ 右辺

（2）左辺 $= \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+A}} \cdot (x+\sqrt{x^2+A})'$

$= \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+A}}$

$\times \left(1+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x^2+A}}\cdot(x^2+A)'\right)$

$= \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+A}} \cdot \left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+A}}\right)$

$= \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+A}} \cdot \dfrac{\sqrt{x^2+A}+x}{\sqrt{x^2+A}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{x^2+A}} =$ 右辺

5. $f(x)=x^4-6x^3+8x^2-1$ とおくと，$y=f(x)$ は $(-\infty,\infty)$ で連続である．

$f(-1)=(-1)^4-6\cdot(-1)^3+8\cdot(-1)^2-1$

$=1+6+8-1=14>0$

$f(0)=-1<0$

$f(1)=1^4-6\cdot1^3+8\cdot1^2-1$

$=1-6+8-1=2>0$

$f(2)=2^4-6\cdot2^3+8\cdot2^2-1$

$=16-48+32-1=-1<0$

$f(3)=3^4-6\cdot3^3+8\cdot3^2-1$

$=81-162+72-1=-10<0$

$f(4)=4^4-6\cdot4^3+8\cdot4^2-1$

$=256-384+128-1=-1<0$

$f(5)=5^4-6\cdot5^3+8\cdot5^2-1$

$=625-750+200-1=74>0$

よって，方程式 $f(x)=0$ は，区間 $(-1,0)$,$(0,1)$,$(1,2)$,$(2,5)$ のそれぞれに少なくとも 1 つずつの実数解をもつが，4 次方程式の実数解は高々 4 個であるから，各区間に（少なくともではなく）1 つずつ実数解をもつ．

したがって，与えられた方程式は -1 と 5 の間に 4 個の実数解をもつ．

6. （1）左辺 $= \dfrac{e^{-x}-e^{-(-x)}}{2}$

$= \dfrac{e^{-x}-e^{x}}{2}$

$= \dfrac{-(e^x-e^{-x})}{2}$

$= -\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

$= -\sinh x =$ 右辺

（2）左辺 $= \dfrac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2}$

$= \dfrac{e^{-x}+e^{x}}{2}$

$= \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$

$= \cosh x =$ 右辺

（3）左辺 $= \left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2$

$= \dfrac{e^{2x}+2e^x\cdot e^{-x}+e^{-2x}}{4}$

$- \dfrac{e^{2x}-2e^x\cdot e^{-x}+e^{-2x}}{4}$

$= \dfrac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}-\dfrac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}$

$= \dfrac{4}{4} = 1 =$ 右辺

（4）左辺 $= \left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'$

$= \dfrac{e^x-e^{-x}\cdot(-x)'}{2}$

$= \dfrac{e^x-e^{-x}\cdot(-1)}{2}$

$= \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

$= \cosh x =$ 右辺

（5）左辺 $= \left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'$

$= \dfrac{e^x+e^{-x}\cdot(-x)'}{2}$

$= \dfrac{e^x+e^{-x}\cdot(-1)}{2}$

$= \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

$= \sinh x =$ 右辺

（6）左辺 $= \left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)'$

$= \dfrac{(e^x-e^{-x})'(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x})'}{(e^x+e^{-x})^2}$

$= \dfrac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}$

$= \dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$

$= \dfrac{1}{\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}$

$= \dfrac{1}{\cosh^2 x} =$ 右辺

練習問題 2-B

1. (1) $y' = (\sqrt{x})' \sin\frac{1}{x} + \sqrt{x}\cdot\left(\sin\frac{1}{x}\right)'$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin\frac{1}{x} + \sqrt{x}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x^2}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin\frac{1}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x^2}\cdot\cos\frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{2x\sqrt{x}}\left(x\sin\frac{1}{x} - 2\cos\frac{1}{x}\right)}$$

(2) $y' = \frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\left(\tan\frac{x}{2}\right)'$

$$= \frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)'$$

$$= \frac{1}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \boldsymbol{\frac{1}{\sin x}}$$

(3) $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}}{|x|}}$$

$$= \frac{1}{\frac{x^2\sqrt{x^2-1}}{x}} \quad (x>1 \text{ より}, |x| = x)$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}}$$

(4) $y' = \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}\cdot\left(\frac{1-x}{1+x}\right)'$

$$= \frac{1}{\frac{(1+x)^2+(1-x)^2}{(1+x)^2}}$$

$$\times\frac{(1-x)'(1+x)-(1-x)(1+x)'}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{-1\cdot(1+x)-(1-x)\cdot 1}{\frac{(1+x)^2+(1-x)^2}{(1+x)^2}\times(1+x)^2}$$

$$= \frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2+(1-x)^2}$$

$$= \frac{-2}{1+2x+x^2+1-2x+x^2}$$

$$= \frac{-2}{2x^2+2} = \boldsymbol{-\frac{1}{x^2+1}}$$

2. (1) 両辺の自然対数をとると

$$\log y = \log x^{\log x}$$
$$= (\log x)^2$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = 2\log x\cdot\frac{1}{x}$$

よって

$$y' = y\cdot\frac{2}{x}\log x$$
$$= x^{\log x}\cdot\frac{2}{x}\log x$$
$$= \boldsymbol{2x^{\log x - 1}\log x}$$

(2) 両辺の自然対数をとると

$$\log y = \log(\log x)^x$$
$$= x\log(\log x)$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = x'\log(\log x) + x\{\log(\log x)\}'$$
$$= \log(\log x) + x\left(\frac{1}{\log x}\cdot\frac{1}{x}\right)$$
$$= \log(\log x) + \frac{1}{\log x}$$

よって

$$y' = y\left\{\log(\log x) + \frac{1}{\log x}\right\}$$
$$= \boldsymbol{(\log x)^x\left\{\log(\log x) + \frac{1}{\log x}\right\}}$$

(3) 両辺の絶対値の自然対数をとると

$$\log|y| = \log\left|\frac{(x+3)^2(x-2)^3}{(x+1)^4}\right|$$
$$= \log|(x+3)^2| + \log|(x-2)^3| - \log|(x+1)^4|$$
$$= 2\log|x+3| + 3\log|x-2| - 4\log|x+1|$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x+3} + \frac{3}{x-2} - \frac{4}{x+1}$$
$$= \frac{2(x^2-x-2)+3(x^2+4x+3)-4(x^2+x-6)}{(x+3)(x-2)(x+1)}$$
$$= \frac{x^2+6x+29}{(x+3)(x-2)(x+1)}$$

よって

$$y' = y\cdot\frac{x^2+6x+29}{(x+3)(x-2)(x+1)}$$
$$= \frac{(x+3)^2(x-2)^3}{(x+1)^4}\cdot\frac{x^2+6x+29}{(x+3)(x-2)(x+1)}$$
$$= \boldsymbol{\frac{(x+3)(x-2)^2(x^2+6x+29)}{(x+1)^5}}$$

（4） 両辺の自然対数をとると

$$\log y = \log \sqrt[3]{\frac{x^2+1}{(x+1)^2}}$$

$$= \log \left\{ \frac{x^2+1}{(x+1)^2} \right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{3}\{\log(x^2+1) - \log(x+1)^2\}$$

$$= \frac{1}{3}\{\log(x^2+1) - 2\log(x+1)\}$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x - 2\cdot\frac{1}{x+1}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x+1}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{x(x+1)-(x^2+1)}{(x^2+1)(x+1)}$$

$$= \frac{2(x-1)}{3(x^2+1)(x+1)^2}$$

よって

$$y' = y\cdot\frac{2(x-1)}{3(x^2+1)(x+1)}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{x^2+1}{(x+1)^2}}\cdot\frac{2(x-1)}{3(x^2+1)(x+1)}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\cdot\frac{2(x-1)}{3(x^2+1)(x+1)}$$

$$= \boldsymbol{\frac{2(x-1)}{3(x+1)\sqrt[3]{(x^2+1)^2(x+1)}}}$$

3.

$$y' = \frac{(\sin x+a)'(x^2-1) - (\sin x+a)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{\cos x\cdot(x^2-1) - (\sin x+a)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{(x^2-1)\cos x - 2x(\sin x+a)}{(x^2-1)^2}$$

よって

$$左辺 = (x^2-1)\cdot\frac{(x^2-1)\cos x - 2x(\sin x-a)}{(x^2-1)^2} + 2x\cdot\frac{\sin x+a}{x^2-1}$$

$$= \frac{(x^2-1)\cos x - 2x(\sin x-a)}{x^2-1} + \frac{2x(\sin x-a)}{x^2-1}$$

$$= \frac{(x^2-1)\cos x}{x^2-1}$$

$$= \cos x = 右辺$$

4.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{2x+1}-1)(\sqrt{2x+1}+1)}{x(\sqrt{2x+1}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(2x+1-1}{x(\sqrt{2x+1}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{2x+1}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{2x+1}+1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\cdot 0+1}+1} = \frac{2}{2} = 1$$

また，$f(0) = 1$

よって，$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$

であるから，$f(x)$ は, $x = 0$ で連続である．

5. （1） $f(x)$ が，$x = 1$ で連続であるための条件は，$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ である．

$f(1) = \sqrt{1} = 1$

また

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0}\sqrt{x}$$

$$= \sqrt{1} = 1$$

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0}(ax^2+bx)$$

$$= a\cdot 1^2 + b\cdot 1 = a+b$$

よって，求める条件は

$\boldsymbol{a+b=1}$

（2） $f(x)$ が，$x = 1$ で微分可能であれば，$x = 1$ で連続で，$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ が存在する．

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1+0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{1}}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1+0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{1}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1+0}\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1-0}\frac{ax^2+bx-a-b)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1-0}\frac{a(x^2-1)+b(x-1))}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1-0}\frac{a(x+1)(x-1)+b(x-1))}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1-0}\frac{(x-1)\{a(x+1)+b\}}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1-0}\{a(x+1)+b\}$$

$$= 2a+b$$

よって，$2a+b=\dfrac{1}{2}$

また，（1）より，$a+b=1$ であるから

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 2a+b=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

これを解いて，$\boldsymbol{a=-\dfrac{1}{2}}$，$\boldsymbol{b=\dfrac{3}{2}}$

6. （1）$f'(0)=\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}$$

ここで，$x\neq 0$ のとき

$0\leqq\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqq 1$ より

$0\leqq\left|x\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqq|x|$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}|x|=0$ であるから

$$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

よって，$\boldsymbol{f'(0)=0}$

（2）$x\neq 0$ のとき

$$f'(x)=(x^2)'\sin\frac{1}{x}+x^2\cdot\left(\sin\frac{1}{x}\right)'$$

$$=2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$=2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$$

$x\longrightarrow 0$ のとき，$2x\sin\dfrac{1}{x}\longrightarrow 0$ であるが，
$\cos\dfrac{1}{x}$ の極限値は存在しない（振動する）ので，
$\displaystyle\lim_{x\to 0}f'(x)$ も存在しない．

よって，$\displaystyle\lim_{x\to 0}f'(x)=f'(0)$ とはならないので，
$f'(x)$ は $x=0$ で**連続ではない．**

∎