1章　微分法

§ 1　関数の極限と導関数 (p.26〜p.27)

練習問題 1-A

1. (1) 与式 $= 1^2 - 2 \cdot 1 + 5$

$= 1 - 2 + 5$

$= \mathbf{4}$

(2) 与式 $= \lim_{h \to 0} (h - 3)$

$= 0 - 3$

$= \mathbf{-3}$

(3) 与式 $= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+3)}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{x-1}{x+3}$

$= \frac{2-1}{2+3}$

$= \mathbf{\frac{1}{5}}$

(4) 与式 $= \lim_{h \to 1} \frac{\sqrt{h}-1}{(\sqrt{h})^2 - 1}$

$= \lim_{h \to 1} \frac{\sqrt{h}-1}{(\sqrt{h}-1)(\sqrt{h}+1)}$

$= \lim_{h \to 1} \frac{1}{\sqrt{h}+1}$

$= \frac{1}{\sqrt{1}+1}$

$= \mathbf{\frac{1}{2}}$

(5) 与式 $= \lim_{x \to \infty} \frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{\frac{5}{x} - 1}$

$= \frac{2-0+0}{0-1}$

$= \mathbf{-2}$

(6) 与式

$= \lim_{x \to \infty} \frac{(\sqrt{x^2+4x} - \sqrt{x^2+x})(\sqrt{x^2+4x} + \sqrt{x^2+x})}{\sqrt{x^2+4x} + \sqrt{x^2+x}}$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{(x^2+4x) - (x^2+x)}{\sqrt{x^2+4x} + \sqrt{x^2+x}}$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+4x} + \sqrt{x^2+x}}$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{3}{\sqrt{1+\frac{4}{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}}}$

$= \frac{3}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1+0}}$

$= \mathbf{\frac{3}{2}}$

(7) 与式 $= \lim_{x \to 0} \frac{3}{2} \cdot \frac{\sin 3x}{3x}$

$= \frac{3}{2} \cdot 1$

$= \mathbf{\frac{3}{2}}$

(8) 与式 $= \lim_{x \to 0} \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{3x}{\tan 3x}$

$= \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1$

$= \mathbf{\frac{2}{3}}$

2. (1) $y' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - \frac{1}{2} \cdot 2x + 1$

$= \boldsymbol{x^2 - x + 1}$

(2) $y' = (x+3)'(2x-1) + (x+3)(2x-1)'$

$= 1 \cdot (2x-1) + (x+3) \cdot 2$

$= 2x - 1 + 2x + 6$

$= \boldsymbol{4x + 5}$

〔別解〕

$y = 2x^2 - x + 6x - 3$

$= 2x^2 + 5x - 3$

$y' = 2 \cdot 2x + 5$

$= \boldsymbol{4x + 5}$

(3) $y' = -3 \cdot \frac{(x^4)'}{(x^4)^2}$

$= -3 \cdot \frac{4x^3}{x^8}$

$= \boldsymbol{-\frac{12}{x^5}}$

〔別解〕

$y = 3x^{-4}$

$y' = 3 \cdot (-4)x^{-4-1}$

$= -12x^{-5}$

$= \boldsymbol{-\frac{12}{x^5}}$

(4) $y = x \cdot x^{\frac{2}{3}}$

$= x^{1+\frac{2}{3}} = x^{\frac{5}{3}}$

$y' = \frac{5}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}}$

$= \boldsymbol{\frac{5}{3} \sqrt[3]{x^2}}$

（5） $y' = 2 \cdot 4(2x-5)^3$

$= \boldsymbol{8(2x-5)^3}$

（6） $y' = x' \cdot (x+1)^3 + x\{(x+1)^3\}'$

$= 1 \cdot (x+1)^3 + x\{1 \cdot 3(x+1)^2\}$

$= (x+1)^3 + 3x(x+1)^2$

$= (x+1)^2\{(x+1)+3x\}$

$= \boldsymbol{(x+1)^2(4x+1)}$

（7） $y' = 3 \cdot \cos(3x-1)$

$= \boldsymbol{3\cos(3x-1)}$

（8） $y' = 2 \cdot \dfrac{1}{\cos^2(2x-3)}$

$= \boldsymbol{\dfrac{2}{\cos^2(2x-3)}}$

（9） $y' = x' \cdot \sqrt{2x+1} + x(\sqrt{2x+1})'$

$= 1 \cdot \sqrt{2x+1} + x\{(2x+1)^{\frac{1}{2}}\}'$

$= \sqrt{2x+1} + x \cdot 2 \cdot \dfrac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{2x+1} + \dfrac{x}{\sqrt{2x+1}}$

$= \dfrac{(\sqrt{2x+1})^2 + x}{\sqrt{2x+1}}$

$= \dfrac{2x+1+x}{\sqrt{2x+1}}$

$= \boldsymbol{\dfrac{3x+1}{\sqrt{2x+1}}}$

(10) $y' = \dfrac{(\sqrt{x+1})'(x+2) - \sqrt{x+1}(x+2)'}{(x+2)^2}$

$= \dfrac{1 \cdot \dfrac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}(x+2) - \sqrt{x+1} \cdot 1}{(x+2)^2}$

$= \dfrac{\dfrac{x+2}{2\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1}}{(x+2)^2}$

$= \dfrac{x+2-2(\sqrt{x+1})^2}{2\sqrt{x+1}(x+2)^2}$

$= \dfrac{x+2-2x-2}{2\sqrt{x+1}(x+2)^2}$

$= \dfrac{-x}{2\sqrt{x+1}(x+2)^2}$

$= \boldsymbol{-\dfrac{x}{2(x+2)^2\sqrt{x+1}}}$

(11) $y' = (\sqrt{x})'\cos 3x + \sqrt{x} \cdot (\cos 3x)'$

$= \dfrac{1}{2} \cdot (\sqrt{x})^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos 3x + \sqrt{x} \cdot 3 \cdot (-\sin 3x)$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \cos 3x - 3\sqrt{x}\sin 3x$

$= \dfrac{\cos 3x - 2\sqrt{x}(3\sqrt{x}\,\sin 3x)}{2\sqrt{x}}$

$= \boldsymbol{\dfrac{\cos 3x - 6x\sin 3x}{2\sqrt{x}}}$

(12) $y' = \dfrac{(e^{2x})'\sin x - e^{2x}(\sin x)'}{(\sin x)^2}$

$= \dfrac{2 \cdot e^{2x}\sin x - e^{2x}\cos x}{\sin^2 x}$

$= \boldsymbol{\dfrac{e^{2x}(2\sin x - \cos x)}{\sin^2 x}}$

3. $S = 2ab + 2ah + 2bh$

$= (2a+2b)h + 2ab$

であるから

$\boldsymbol{\dfrac{dS}{dh} = 2a + 2b}$

4. $f'(x) = \dfrac{(x+b)'(x+a) - (x+b)(x+a)'}{(x+a)^2}$

$= \dfrac{1 \cdot (x+a) - (x+b) \cdot 1}{(x+a)^2}$

$= \dfrac{a-b}{(x+a)^2}$

$f(0) = 2$ であるから

$\dfrac{0+b}{0+a} = 2$，すなわち，$b = 2a \cdots$①

$f'(0) = 1$ であるから

$\dfrac{a-b}{(0+a)^2} = 1$，すなわち，$a - b = a^2 \cdots$②

①を②に代入して

$a - 2a = a^2$

$a(a+1) = 0$

よって，$a = 0,\ -1$

したがって，$(a,\ b) = (0,\ 0),\ (-1,\ -2)$

ここで，$(a,\ b) = (0,\ 0)$ のとき

$f(x) = \dfrac{x+0}{x+0} = 1$

となり，$f(0) = 2$ を満たさない．

$\left(\text{または,}\ \dfrac{b}{a} = 2\ \text{より,}\ a \fallingdotseq 0\ \text{なので}\right)$

よって，$\boldsymbol{a = -1,\ b = -2}$

5. （1） $\dfrac{h}{2} = t$ とおくと

$h \to 0$ のとき，$t \to 0$

与式 $= \displaystyle\lim_{t \to 0}(1+t)^{\frac{1}{2t}}$

$= \displaystyle\lim_{t \to 0}\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^{\frac{1}{2}}$

$= e^{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\sqrt{e}}$

（2）$-\dfrac{1}{x}=t$ とおくと

$x\to\infty$ のとき，$t\to 0$

$$与式=\lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{1}{t}}$$
$$=\lim_{t\to 0}\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^{-1}$$
$$=e^{-1}=\boldsymbol{\frac{1}{e}}$$

練習問題 1-B

1. （1）$\dfrac{\pi}{2}-x=\theta$ とおくと

$x\to\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\theta\to 0$

$$与式=\lim_{\theta\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\pi-2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$$
$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{2\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot 1=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

（2）$-x=t$ とおくと

$x\to-\infty$ のとき，$t\to\infty$

$$与式=\lim_{t\to\infty}\frac{\sin(-t)}{-t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{\sin t}{t}\right)$$

$-1\leqq\sin t\leqq 1$ であるから, 各辺に $-\dfrac{1}{t}\ (<0)$ をかけると

$$-\frac{1}{t}\leqq-\frac{\sin t}{t}\leqq\frac{1}{t}$$

ここで

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}=0$$
$$\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{t}\right)=0$$

よって

$$\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{\sin t}{t}\right)=\boldsymbol{0}$$

（3）
$$与式=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\sin x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\sin x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\sin x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos x}$$
$$=1\cdot\frac{1}{1+1}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

（4）
$$与式=\lim_{x\to 0}\frac{2}{3}\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}$$
$$=\frac{2}{3}\cdot 1\cdot 1=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

（5）$-x=t$ とおくと

$x\to-\infty$ のとき，$t\to\infty$

$$与式=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{(-t)^2+1}-1}{-t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1-\sqrt{t^2+1}}{t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(1-\sqrt{t^2+1})(1+\sqrt{t^2+1})}{t(1+\sqrt{t^2+1})}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1-(t^2+1)}{t(1+\sqrt{t^2+1})}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-t}{1+\sqrt{t^2+1}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-1}{\frac{1}{t}+\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}$$
$$=\frac{-1}{0+\sqrt{1+0}}$$
$$=\frac{-1}{\sqrt{1}}=\boldsymbol{-1}$$

（6）$-x=t$ とおくと

$x\to-\infty$ のとき，$t\to\infty$

$$与式=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{(-t)^2+(-t)}+(-t)}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{t^2-t}-t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1\cdot(\sqrt{t^2-t}+t)}{(\sqrt{t^2-t}-t)(\sqrt{t^2-t}+t)}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2-t}+t}{(\sqrt{t^2-t})^2-t^2}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2-t}+t}{t^2-t-t^2}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2-t}+t}{-t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\sqrt{t^2-t}}{-t}-1\right)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left(-\sqrt{1-\frac{1}{t}}-1\right)$$
$$=-\sqrt{1-0}-1$$
$$=-\sqrt{1}-1=\boldsymbol{-2}$$

2. （1）$\displaystyle\lim_{x\to 2}(x-2)=0$ であるから，極限値が存在するためには

$$\lim_{x\to 2}(x^2+ax+b)=0$$

よって，$2^2+a\cdot 2+b=0$

すなわち，$\boldsymbol{2a+b+4=0}$

（2）（1）より，$b=-2a-4$ であるから

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax-2a-4}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax-2(a+2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+a+2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}(x+a+2)$$
$$=2+a+2=a+4$$

ここで，$a+4=5$ であるから，$a=1$

$b=-2\cdot 1-4=-6$

よって，$\boldsymbol{a=1,\ b=-6}$

3. （1）$y'=x'\sqrt[3]{3x-4}+x(\sqrt[3]{3x-4})'$

$$=1\cdot\sqrt[3]{3x-4}+x\{(3x-4)^{\frac{1}{3}}\}'$$
$$=\sqrt[3]{3x-4}+x\cdot 3\cdot\frac{1}{3}(3x-4)^{-\frac{2}{3}}$$
$$=\sqrt[3]{3x-4}+\frac{x}{\sqrt[3]{(3x-4)^2}}$$
$$=\frac{\sqrt[3]{(3x-4)^3}+x}{\sqrt[3]{(3x-4)^2}}$$
$$=\frac{3x-4+x}{\sqrt[3]{(3x-4)^2}}$$
$$=\boldsymbol{\frac{4(x-1)}{\sqrt[3]{(3x-4)^2}}}$$

（2）$y'=\{(2x+3)^2\}'(x+1)+(2x+3)^2(x+1)'$

$$=2\cdot 2(2x+3)(x+1)+(2x+3)^2\cdot 1$$
$$=4(2x+3)(x+1)+(2x+3)^2$$
$$=(2x+3)\{4(x+1)+(2x+3)\}$$
$$=(2x+3)(4x+4+2x+3)$$
$$=\boldsymbol{(2x+3)(6x+7)}$$

（3）$y'=(\sin 2x)'\tan 4x+\sin 2x(\tan 4x)'$

$$=2\cdot\cos 2x\ \tan 4x+\sin 2x\cdot 4\cdot\frac{1}{\cos^2 4x}$$
$$=\boldsymbol{2\cos 2x\tan 4x+\frac{4\sin 2x}{\cos^2 4x}}$$

（4）$y'=(e^{-3x})'\cos 2x+e^{-3x}(\cos 2x)'$

$$=-3\cdot e^{-3x}\cos 2x+e^{-3x}\cdot 2(-\sin 2x)$$
$$=\boldsymbol{-e^{-3x}(3\cos 2x+2\sin 2x)}$$

（5）$y'=(t^2-1)'\sqrt{3t+1}+(t^2-1)(\sqrt{3t+1})'$

$$=2t\sqrt{3t+1}+(t^2-1)\cdot 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3t+1}}$$
$$=2t\sqrt{3t+1}+\frac{3(t^2-1)}{2\sqrt{3t+1}}$$
$$=\frac{4t(3t+1)+3(t^2-1)}{2\sqrt{3t+1}}$$
$$=\frac{12t^2+4t+3t^2-3}{2\sqrt{3t+1}}$$
$$=\boldsymbol{\frac{15t^2+4t-3}{2\sqrt{3t+1}}}$$

（6）$y'=\dfrac{u'\sqrt{2u+1}-u(\sqrt{2u+1})'}{(\sqrt{2u+1})^2}$

$$=\frac{\sqrt{2u+1}-u\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2u+1}}}{2u+1}$$
$$=\frac{\sqrt{2u+1}-\frac{u}{\sqrt{2u+1}}}{2u+1}$$
$$=\frac{(2u+1)-u}{(2u+1)\sqrt{2u+1}}$$
$$=\boldsymbol{\frac{u+1}{(2u+1)\sqrt{2u+1}}}$$

（7）$y'=\dfrac{(1-\sqrt{x})'(1+\sqrt{x})-(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})'}{(1+\sqrt{x})^2}$

$$=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+\sqrt{x})-(1-\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2}$$
$$=\frac{-(1+\sqrt{x})-(1-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$$
$$=\frac{-2}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$$
$$=\boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}}$$

（8） $$y' = \frac{(\sin x - \cos x)'(\sin x + \cos x) - (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)'}{(\sin x + \cos x)^2}$$
$$= \frac{(\cos x + \sin x)(\sin x + \cos x) - (\sin x - \cos x)(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$
$$= \frac{(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2}{(\sin x + \cos x)^2}$$
$$= \frac{2(\sin^2 x + \cos^2 x)}{(\sin x + \cos x)^2}$$
$$= \boldsymbol{\frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}}$$
$$= \frac{2}{\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos x^2}$$
$$= \frac{2}{1 + 2\sin x \cos x}$$
$$= \boldsymbol{\frac{2}{1 + \sin 2x}}$$

4. （1） $2h = k$ とおくと，$h \to 0$ のとき $k \to 0$

$$与式 = \lim_{h\to 0} 2 \cdot \frac{f(a+2h) - f(a)}{2h}$$
$$= \lim_{k\to 0} 2 \cdot \frac{f(a+k) - f(a)}{k}$$
$$= 2 \cdot f'(a) = \boldsymbol{2f'(a)}$$

（2） $-h = k$ とおくと，$h \to 0$ のとき $k \to 0$

$$与式 = \lim_{h\to 0} \left\{ -\frac{f(a+(-h)) - f(a)}{-h} \right\}$$
$$= \lim_{k\to 0} \left\{ -\frac{f(a+k) - f(a)}{k} \right\}$$
$$= \boldsymbol{-f'(a)}$$

（3）
$$与式 = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - f(a-h) + f(a)}{h}$$
※ $f(a)$ を引いて加える．
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \{f(a-h) - f(a)\}}{h}$$
$$= \lim_{k\to 0} \left\{ \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{f(a-h) - f(a)}{h} \right\}$$
$$= f'(a) - (-f'(a))$$
※（2）より
$$= \boldsymbol{2f'(a)}$$

（4）
$$与式 = \lim_{x\to a} \frac{xf(a) - af(a) - af(x) + af(a)}{x-a}$$
※ $af(a)$ を引いて加える．
$$= \lim_{x\to a} \frac{(x-a)f(a) - a(f(x) - f(a))}{x-a}$$
$$= \lim_{x\to a} \left\{ \frac{(x-a)f(a)}{x-a} - \frac{a(f(x) - f(a))}{x-a} \right\}$$
$$= \lim_{x\to a} \left\{ f(a) - a \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \right\}$$
$$= \boldsymbol{f(a) - af'(a)}$$

5. （1） $\tan x = t$ とおくと，$x \to 0$ のとき $t \to 0$

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \lim_{t \to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \\
&= \boldsymbol{e}
\end{aligned}
$$

（2）

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{1+\dfrac{1}{x}} \right)^x \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{e}}
\end{aligned}
$$