1章　微分法

§ 1　関数の極限と導関数 (p.6〜p.25)

問 1

（1）与式 $= 2^3 = \mathbf{8}$

（2）与式 $= 2^0 = \mathbf{1}$

（3）与式 $= \cos\pi = \mathbf{-1}$

問 2

（1）$\displaystyle\lim_{x\to-1} x^2 = (-1)^2 = 1$

$\displaystyle\lim_{x\to-1} 2 = 2$

よって

与式 $= 1 + 2 = \mathbf{3}$

（2）$\displaystyle\lim_{x\to1} 2^x = 2^1 = 2$

$\displaystyle\lim_{x\to1} \cos\pi x = \cos\pi = -1$

よって

与式 $= 2 \times (-1) = \mathbf{-2}$

（3）$\displaystyle\lim_{x\to2} (x-1) = 2-1 = 1$

$\displaystyle\lim_{x\to2} (x+2) = 2+2 = 4$

よって

与式 $= \mathbf{\dfrac{1}{4}}$

問 3

（1）与式 $\displaystyle= \lim_{x\to0} \frac{x(x+6)}{3x}$

$\displaystyle= \lim_{x\to0} \frac{x+6}{3}$

$\displaystyle= \frac{0+6}{3}$

$= \mathbf{2}$

（2）与式 $\displaystyle= \lim_{x\to2} \frac{(x-1)(x-2)}{x-2}$

$\displaystyle= \lim_{x\to2} (x-1)$

$= 2 - 1 = \mathbf{1}$

（3）与式 $\displaystyle= \lim_{x\to-2} \frac{(2x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)}$

$\displaystyle= \lim_{x\to-2} \frac{2x-1}{x-1}$

$\displaystyle= \frac{2\cdot(-2)-1}{-2-1}$

$\displaystyle= \frac{-5}{-3} = \mathbf{\frac{5}{3}}$

（4）与式 $\displaystyle= \lim_{x\to1} \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x-1}$

$\displaystyle= \lim_{x\to1} \frac{(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x-1}$

$\displaystyle= \lim_{x\to1} (x^2+1)(x+1)$

$= (1^2+1)(1+1)$

$= 2\cdot2 = \mathbf{4}$

問 4

（1）与式 $\displaystyle= \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{3}{x}}{1-\frac{1}{x}}$

$\displaystyle= \frac{2+0}{1-0}$

$= \mathbf{2}$

（2）与式 $\displaystyle= \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}{2-\frac{5}{x^2}}$

$\displaystyle= \frac{1+0-0}{2-0}$

$= \mathbf{\dfrac{1}{2}}$

（3）与式 $\displaystyle= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}}{4-\frac{8}{x}+\frac{3}{x^2}}$

$\displaystyle= \frac{0+0}{4-0+0}$

$= \mathbf{0}$

（4）与式 $\displaystyle= \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{2x^2+1}{x^2}}$

$\displaystyle= \lim_{x\to\infty} \sqrt{2+\frac{1}{x^2}}$

$= \sqrt{2+0}$

$= \mathbf{\sqrt{2}}$

問 5

（1）与式 $\displaystyle= \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$

$\displaystyle= \lim_{x\to\infty} \frac{(x+2)-x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$

$\displaystyle= \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$

$= \mathbf{0}$

（2）与式 $= \displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^4+2x^2}-x^2)(\sqrt{x^4+2x^2}+x^2)}{\sqrt{x^4+2x^2}+x^2}$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(x^4+2x^2)-(x^2)^2}{\sqrt{x^4+2x^2}+x^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{\sqrt{x^4+2x^2}+x^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}+1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+0}+1}$$

$$= \frac{2}{2} = \mathbf{1}$$

問 6

（1）$\displaystyle\frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{(-2\cdot 4^2)-(-2\cdot 1^2)}{3}$

$$= \frac{-32+2}{3}$$

$$= \frac{-30}{3} = \mathbf{-10}$$

（2）$\displaystyle\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{(3b+4)-(3a+4)}{b-a}$

$$= \frac{3b-3a}{b-a}$$

$$= \frac{3(b-a)}{b-a}$$

$$= \mathbf{3}$$

問 7

$$f'(2) = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x^2-2^2}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2}(x+2)$$

$$= 2+2 = \mathbf{4}$$

〔別解〕

$$f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-2^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{4+4h+h^2-4}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{4h+h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(4+h)$$

$$= 4+0 = \mathbf{4}$$

問 8

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{(x+a)(x-a)}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a}(x+a)$$

$$= a+a = \mathbf{2a}$$

〔別解〕

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2-a^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{a^2+2ah+h^a-4}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2ah+h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(2a+h)$$

$$= 2a+0 = \mathbf{2a}$$

点 $(-3,\ 9)$ における接線の傾きは

$$f'(-3) = 2\cdot(-3) = \mathbf{-6}$$

問 9

（1）　$y = f(x)$ とおくと

$$f'(x) = \lim_{X\to x}\frac{f(X)-f(x)}{X-x}$$

$$= \lim_{X\to x}\frac{(X^2+2X)-(x^2+2x)}{X-x}$$

$$= \lim_{X\to x}\frac{(X^2-x^2)+2(X-x)}{X-x}$$

$$= \lim_{X\to x}\frac{(X+x)(X-x)+2(X-x)}{X-x}$$

$$= \lim_{X\to x}(X+x+2)$$

$$= x+x+2 = \mathbf{2x+2}$$

〔別解〕

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+2(x+h)-(x^2+2x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2hx+h^2+2x+2h-x^2-2x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2hx+2h+h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(2x+2+h)$$

$$= 2x+2+0 = \mathbf{2x+2}$$

$x=-1$ における微分係数は

$$f'(-1)=2\cdot(-1)+2=\mathbf{0}$$

（2） $y=f(x)$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{X\to x}\frac{f(X)-f(x)}{X-x}\\ &=\lim_{X\to x}\frac{(X^3+3X+5)-(x^3+3x+5)}{X-x}\\ &=\lim_{X\to x}\frac{(X^3-x^3)+3(X-x)}{X-x}\\ &=\lim_{X\to x}\frac{(X-x)(X^2+Xx+x^2)+3(X-x)}{X-x}\\ &=\lim_{X\to x}(X^2+Xx+x^2+3)\\ &=x^2+x^2+x^2+3\\ &=\mathbf{3x^2+3} \end{aligned}$$

〔別解〕

$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3+3(x+h)+5-(x^3+3x+5)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3h+3xh^2+h^3}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}(3x^2+3+3xh+h^2)\\ &=3x^2+3+3x\cdot 0+0\\ &=\mathbf{3x^2+3} \end{aligned}$$

$x=-1$ における微分係数は

$$f'(-1)=3\cdot(-1)^2+3=\mathbf{6}$$

問 10

（1）

$$\begin{aligned} y'&=2(x^5)'\\ &=2\cdot 5x^4\\ &=\mathbf{10x^4} \end{aligned}$$

（2）

$$\begin{aligned} y'&=-(x^3)'+\frac{3}{2}(x^2)'\\ &=-(3x^2)+\frac{3}{2}\cdot 2x\\ &=\mathbf{-3x^2+3x} \end{aligned}$$

（3）

$$y=\frac{3}{2}x^4+\frac{5}{2}x$$

$$\begin{aligned} y'&=\frac{3}{2}(x^4)'+\frac{5}{2}(x)'\\ &=\frac{3}{2}\cdot 4x^3+\frac{5}{2}\cdot 1\\ &=\mathbf{6x^3+\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

（4）

$$\begin{aligned} y'&=\frac{(x^6-x^3)'}{3}\\ &=\frac{(x^6)'-(x^3)'}{3}\\ &=\frac{6x^5-3x^2}{3}\\ &=\mathbf{2x^5-x^2} \end{aligned}$$

問 11

（1）

$$\begin{aligned} y'&=(x-2)'(3x+1)+(x-2)(3x+1)'\\ &=1\cdot(3x+1)+(x-2)\cdot 3\\ &=3x+1+3x-6\\ &=\mathbf{6x-5} \end{aligned}$$

（2）

$$\begin{aligned} y'&=(-x+2)'(x^2+x+3)+(-x+2)(x^2+x+3)'\\ &=-1\cdot(x^2+x+3)+(-x+2)(2x+1)\\ &=-x^2-x-3+(-2x^2+3x+2)\\ &=-x^2-x-3-2x^2+3x+2\\ &=\mathbf{-3x^2+2x-1} \end{aligned}$$

（3）

$$\begin{aligned} s'&=(t^2+2t)'(t^3-3)+(t^2+2t)(t^3-3)'\\ &=(2t+2)(t^3-3)+(t^2+2t)\cdot 3t^2\\ &=2t^4-6t+2t^3-6+3t^4+6t^3\\ &=\mathbf{5t^4+8t^3-6t-6} \end{aligned}$$

（4）

$$\begin{aligned} y'&=\frac{(2x+3)'(x+2)-(2x+3)(x+2)'}{(x+2)^2}\\ &=\frac{2(x+2)-(2x+3)\cdot 1}{(x+2)^2}\\ &=\frac{2x+4-2x-3}{(x+2)^2}\\ &=\mathbf{\frac{1}{(x+2)^2}} \end{aligned}$$

（5）

$$\begin{aligned} v'&=-\frac{(u^2+1)'}{(u^2+1)^2}\\ &=\mathbf{-\frac{2u}{(u^2+1)^2}} \end{aligned}$$

（6） $y' = \dfrac{(x+4)'(x^2+5x+7)-(x+4)(x^2+5x+7)'}{(x^2+5x+7)^2}$

$= \dfrac{1\cdot(x^2+5x+7)-(x+4)(2x+5)}{(x^2+5x+7)^2}$

$= \dfrac{x^2+5x+7-(2x^2+13x+20)}{(x^2+5x+7)^2}$

$= \dfrac{-x^2-8x-13}{(x^2+5x+7)^2}$

$= \boldsymbol{-\dfrac{x^2+8x+13}{(x^2+5x+7)^2}}$

問 12

（1） $y' = (x+1)'(x+2)(x+3)$
$+ (x+1)(x+2)'(x+3)$
$+ (x+1)(x+2)(x+3)'$
$= 1\cdot(x+2)(x+3)$
$+ (x+1)\cdot 1\cdot(x+3)$
$+ (x+1)(x+2)\cdot 1$
$= (x^2+5x+6)$
$+ (x^2+4x+3)$
$+ (x^2+3x+2)$
$= \boldsymbol{3x^2+12x+11}$

（2） $s' = (t^2+1)'(t^2-2)(t^2+4)$
$+ (t^2+1)(t^2-2)'(t^2+4)$
$+ (t^2+1)(t^2-2)(t^2+4)'$
$= 2t(t^2-2)(t^2+4)$
$+ (t^2+1)\cdot 2t\cdot(t^2+4)$
$+ (t^2+1)(t^2-2)\cdot 2t$
$= 2t(t^4+2t^2-8)$
$+ 2t(t^4+5t^2+4)$
$+ 2t(t^4-t^2-2)$
$= 2t(3t^4+6t^2-6)$
$= \boldsymbol{6t^5+12t^3-12t}$

問 13

（1） $y = x^{-4}$
$y' = -4x^{-5}$
$= \boldsymbol{-\dfrac{4}{x^5}}$

（2） $s = 3t^{-2}$
$s' = 3\cdot(-2)t^{-3}$
$= \boldsymbol{-\dfrac{6}{t^3}}$

（3） $y' = 2\cdot(-1)x^{-2}+(-2)x^{-3}$
$= -2x^{-2}-2x^{-3}$
$= \boldsymbol{-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}}$

（4） $v = 2t^3-4t^{-3}$
$v' = 2\cdot 3t^2-4\cdot(-3)t^{-4}$
$= \boldsymbol{6t^2+\dfrac{12}{t^4}}$

問 14

（1） $y' = \dfrac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1}$
$= \boldsymbol{\dfrac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}}$
$= \dfrac{3}{4x^{\frac{1}{4}}} = \boldsymbol{\dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}}}$

（2） $y = x^{\frac{2}{3}}$
$y' = \dfrac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}$
$= \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$
$= \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \boldsymbol{\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}}$

（3） $y = x^{-\frac{1}{2}}$
$y' = -\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}$
$= -\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$
$= -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$
$= -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x^3}} = \boldsymbol{-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}}$

問 15

（1） $y' = (x+2)'\sqrt{x}+(x+2)(\sqrt{x})'$
$= 1\cdot\sqrt{x}+(x+2)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$= \dfrac{2(\sqrt{x})^2+x+2}{2\sqrt{x}}$
$= \dfrac{2x+x+2}{2\sqrt{x}}$
$= \boldsymbol{\dfrac{3x+2}{2\sqrt{x}}}$

（2） $y' = \dfrac{(2x+3)'\sqrt{x} - (2x+3)(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2}$

$= \dfrac{2\sqrt{x} - (2x+3)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$

$= \dfrac{(2\sqrt{x})^2 - (2x+3)}{x\cdot 2\sqrt{x}}$

$= \dfrac{4x-(2x+3)}{2x\sqrt{x}}$

$= \boldsymbol{\dfrac{2x-3}{2x\sqrt{x}}}$

問 16

（1） $y' = 2\cdot 3(2x-3)^2$

$= \boldsymbol{6(2x-3)^2}$

（2） $y' = -3\cdot\dfrac{2}{3}(-3x+2)^{\frac{2}{3}-1}$

$= \boldsymbol{-2(-3x+2)^{-\frac{1}{3}}}$

$= \boldsymbol{-\dfrac{2}{\sqrt[3]{-3x+2}}}$

（3） $y = (2x+5)^{\frac{3}{4}}$

$y' = 2\cdot\dfrac{3}{4}(2x+5)^{\frac{3}{4}-1}$

$= \dfrac{3}{2}(2x+5)^{-\frac{1}{4}}$

$= \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{(2x+5)^{\frac{1}{4}}}$

$= \boldsymbol{\dfrac{3}{2\sqrt[4]{2x+5}}}$

（4） $y = (4x+3)^{-5}$

$y' = 4\cdot\{-5(4x+3)^{-5-1}\}$

$= -20(4x+3)^{-6}$

$= \boldsymbol{-\dfrac{20}{(4x+3)^6}}$

問 17

（1）与式 $= \lim_{\theta\to 0}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sin 2\theta}{2\theta}$

$= \dfrac{1}{2}\cdot 1 = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

（2）与式 $= \lim_{\theta\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\theta}$

$= \lim_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta\cdot\cos\theta}$

$= \lim_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta}\cdot\dfrac{1}{\cos\theta}$

$= 1\cdot\dfrac{1}{1} = \boldsymbol{1}$

（3）与式 $= \lim_{\theta\to 0}\dfrac{\dfrac{\theta}{3\theta}}{\dfrac{\sin 3\theta}{3\theta}}$

$= \lim_{\theta\to 0}\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{\dfrac{\sin 3\theta}{3\theta}}$

$= \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1} = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

問 18

（1） $y' = 1\cdot\cos(x+2)$

$= \boldsymbol{\cos(x+2)}$

（2） $y' = -4\cdot\{-\sin(1-4x)\}$

$= \boldsymbol{4\cos(1-4x)}$

（3） $y' = 2\cdot\dfrac{1}{\cos^2 2x}$

$= \boldsymbol{\dfrac{2}{\cos^2 2x}}$

問 19

（1） $y' = -1\cdot e^{-x}$

$= \boldsymbol{-e^{-x}}$

（2） $y' = x'\cdot e^x + x\cdot(e^x)'$

$= 1\cdot e^x + x\cdot e^x$

$= \boldsymbol{e^x(x+1)}$

（3） $y' = (e^x)'\cdot\cos x + e^x(\cos x)'$

$= e^x\cos x + e^x\cdot(-\sin x)$

$= \boldsymbol{e^x(\cos x - \sin x)}$

（4） $y' = (e^{2x})'\cdot\sin 3x + e^{2x}(\sin 3x)'$

$= 2e^{2x}\sin 3x + e^{2x}\cdot 3\cos 3x$

$= \boldsymbol{e^{2x}(2\sin 3x + 3\cos 3x)}$

（5）　$y' = \dfrac{x' \cdot e^x - x(e^x)'}{(e^x)^2}$

$= \dfrac{e^x - xe^x}{(e^x)^2}$

$= \dfrac{e^x(1-x)}{(e^x)^2}$

$= \boldsymbol{\dfrac{1-x}{e^x}}$

（6）　$y = e^{\frac{x}{2}}$

$y' = \dfrac{1}{2} \cdot e^{\frac{x}{2}}$

$= \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{e^x}}{2}}$

問 20

（1）与式 $= 2\log e$

$= 2 \cdot 1 = \mathbf{2}$

（2）与式 $= \log e^{-1}$

$= -\log e$

$= -1 \cdot 1 = \mathbf{-1}$

（3）与式 $= \log e^{\frac{1}{2}}$

$= \dfrac{1}{2}\log e$

$= \dfrac{1}{2} \cdot 1 = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

問 21

（1）　$y' = \mathbf{3^x \log 3}$

（2）　$y' = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x \log\dfrac{1}{2}$

$= \dfrac{1}{2^x}(\log 1 - \log 2)$

$= \dfrac{1}{2^x} \cdot (-\log 2)$

$= \boldsymbol{-\dfrac{\log 2}{2^x}}$

（3）　$y' = \mathbf{3 \cdot 2^{3x+1} \log 2}$

問 22

（1）$-h = t$ とおくと

$h \to 0$ のとき，$t \to 0$

左辺 $= \displaystyle\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{-t}}$

$= \displaystyle\lim_{t\to 0}\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^{-1}$

$= \displaystyle\lim_{t\to 0}\dfrac{1}{(1+t)^{\frac{1}{t}}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{e}} =$ 右辺

（2）$\dfrac{1}{x} = t$ とおくと

$x \to -\infty$ のとき，$t \to -0$

左辺 $= \displaystyle\lim_{t\to -0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$

$= \boldsymbol{e} =$ 右辺