7章　場合の数と数列

§2　数列 (p.86〜p.94)

BASIC

475 (1) $a_1 = 5 - 2 \cdot 1 = 3$

$a_2 = 5 - 2 \cdot 2 = 1$

$a_3 = 5 - 2 \cdot 3 = -1$

$a_4 = 5 - 2 \cdot 4 = -3$

$a_5 = 5 - 2 \cdot 5 = -5$

よって，**3，1，−1，−3，−5**

(2) $b_1 = \frac{2^1}{1} = 2$

$b_2 = \frac{2^2}{2} = 2$

$b_3 = \frac{2^3}{3} = \frac{8}{3}$

$b_4 = \frac{2^4}{4} = 4$

$b_5 = \frac{2^5}{5} = \frac{32}{5}$

よって，$\boldsymbol{2,\ 2,\ \frac{8}{3},\ 4,\ \frac{32}{5}}$

(3) $c_1 = (-1)^1 - 1 = -2$

$c_2 = (-1)^2 - 1 = 0$

$c_3 = (-1)^3 - 1 = -2$

$c_4 = (-1)^4 - 1 = 0$

$c_5 = (-1)^5 - 1 = -2$

よって，**−2，0，−2，0，−2**

476 (1) 一般項を a_n，公差を d とすると

$a_n = 5 + (n-1)d$

$a_4 = 14$ なので

$5 + (4-1)d = 14$

$3d = 14 - 5$

$d = 3$

よって，一般項は

$a_n = 5 + (n-1)3$

$= 5 + 3n - 3$

$\boldsymbol{= 3n + 2}$

(2) 一般項を a_n，初項を a，公差を d とすると

$a_n = a + (n-1)d$

$a_3 = 10,\ a_{10} = 3$ なので

$$\begin{cases} a + 2d = 10 \\ a + 9d = 3 \end{cases}$$

これを解いて，$a = 12,\ d = -1$

よって，一般項は

$a_n = 12 + (n-1) \cdot (-1)$

$= 12 - n + 1$

$\boldsymbol{= -n + 13}$

(3) 一般項を a_n とする．

初項は，-1

公差は，$1 - (-1) = 2$

よって，一般項は

$a_n = -1 + (n-1)2$

$= -1 + 2n - 2$

$\boldsymbol{= 2n - 3}$

(4) 一般項を a_n とする．

初項は，2

公差は，$\frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$

よって，一般項は

$a_n = 2 + (n-1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$= 2 - \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$

$\boldsymbol{= -\frac{1}{2}n + \frac{5}{2}}$

477 (1) 一般項を a_n とする．

$a_n = -68 + (n-1)4$

$= -68 + 4n - 4$

$\boldsymbol{= 4n - 72}$

(2) $a_n = -32$ であるから

$4n - 72 = -32$

$4n = 40$

$n = 10$

よって，-32 は **第 10 項**

(3) 第 n 項がはじめて正の数になるとすると

$4n - 72 > 0$

$4n > 72$

$n > 18$

よって，はじめて正の数になるのは，**第 19 項**

478 (1) 求める和は

$\frac{10\{2 \cdot 5 + (10-1)3\}}{2}$

$= \frac{10(10+27)}{2}$

$= 5 \cdot 37 = \boldsymbol{185}$

(2) 与えられた等差数列は，初項 -1，公差 2 であるから，一般項は

$-1 + (n-1)2 = 2n - 3$

19 を第 n 項とすると

$2n - 3 = 19$ より，$n = 11$

よって，求める和は

$\frac{11\{2 \cdot (-1) + (11-1)2\}}{2}$

$= \frac{11(-2+20)}{2}$

$= 11 \cdot 9 = \boldsymbol{99}$

(3) 求める和は

$100 + 105 + 110 + \cdots + 995$

これは，初項 100，末項 995，公差 5 の等差数列の和である．

一般項は

$100 + (n-1)5 = 5n + 95$

995 を第 n 項とすると

$5n+95=995$ より，$n=180$

よって，求める和は

$$\frac{180\{2\cdot 100+(180-1)5\}}{2}$$

$$=\frac{180(200+895)}{2}$$

$$=90\cdot 1095=\mathbf{98550}$$

479（1）初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n=\frac{n\{2\cdot(-68)+(n-1)4\}}{2}$$

$$=\frac{n(-136+4n-4)}{2}$$

$$=\frac{n(4n-140)}{2}$$

$$=2n(n-35)$$

よって，初項から第 10 項までの和は

$$S_{10}=2\cdot 10(10-35)$$

$$=20\cdot(-25)$$

$$=\mathbf{-500}$$

（2）　$S_n>0$ を解くと

$2n(n-35)>0$

$n(n-35)>0$

$n<0,\ 35<n$

n は自然数であるから，**第 36 項**

480（1）　公比を r とすると

$2r^3=-16$ であるから，$r=-2$

したがって，2 の次の 2 つの項は

$2\times(-2)=-4$

$-4\times(-2)=8$

よって，2, $\boxed{\mathbf{-4}}$, $\boxed{\mathbf{8}}$, -16, 32, $\cdots$

（2）　公比を r とすると

$-1\cdot r^4=-\dfrac{1}{16}$ であるから，$r=\pm\dfrac{1}{2}$

ｉ）$r=\dfrac{1}{2}$ のとき

-1 の次の 3 つの項は

$$-1\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{8}$$

よって

$$-1,\ \boxed{\boldsymbol{-\frac{1}{2}}},\boxed{\boldsymbol{-\frac{1}{4}}},\boxed{\boldsymbol{-\frac{1}{8}}}\ -\frac{1}{16},\ \cdots$$

ii）$r=-\dfrac{1}{2}$ のとき

-1 の次の 3 つの項は

$$-1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$$

よって

$$-1,\ \boxed{\boldsymbol{\frac{1}{2}}},\boxed{\boldsymbol{-\frac{1}{4}}},\boxed{\boldsymbol{\frac{1}{8}}}\ -\frac{1}{16},\ \cdots$$

（3）　公比を r とすると

$3r^2=9$ であるから，$r=\pm\sqrt{3}$

ｉ）$r=\sqrt{3}$ のとき

3 の前の項は

$$\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

3 の次の項は

$$3\times\sqrt{3}=3\sqrt{3}$$

9 の次の項は

$$9\times\sqrt{3}=9\sqrt{3}$$

よって

$$\boxed{\boldsymbol{\sqrt{3}}},\ 3,\ \boxed{\boldsymbol{3\sqrt{3}}},\ 9,\ \boxed{\boldsymbol{9\sqrt{3}}},\ \cdots$$

ii）$r=-\sqrt{3}$ のとき

3 の前の項は

$$\frac{3}{-\sqrt{3}}=-\sqrt{3}$$

3 の次の項は

$$3\times(-\sqrt{3})=-3\sqrt{3}$$

9 の次の項は

$$9\times(-\sqrt{3})=-9\sqrt{3}$$

よって

$$\boxed{\boldsymbol{-\sqrt{3}}},3,\ \boxed{\boldsymbol{-3\sqrt{3}}},9,\ \boxed{\boldsymbol{-9\sqrt{3}}},\ \cdots$$

481（1）公比を r とすると

$1\cdot r=2$ より，$r=2$

よって，一般項は

$$a_n=1\cdot 2^{n-1}$$

$$=\boldsymbol{2^{n-1}}$$

また，第 10 項は

$$a_{10}=2^{10-1}$$

$$=2^9=\mathbf{512}$$

（2）公比を r とすると，第 4 項が $\dfrac{9}{4}$ であるから

$$\frac{1}{12}r^3=\frac{9}{4}$$

$r^3=27$

よって，$r=3$

したがって，一般項は

$$a_n=\frac{1}{12}\cdot 3^{n-1}$$

$$=\boldsymbol{\frac{3^{n-2}}{4}}$$

また，第 10 項は

$$a_{10}=\frac{3^{10-2}}{4}$$

$$=\frac{3^8}{4}=\mathbf{\frac{6561}{4}}$$

（3）初項を a，公比を r とすると

第 2 項が $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから，$ar=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

第 4 項が $\sqrt{2}$ であるから，$ar^3=\sqrt{2}$

2 式より

$$\frac{ar^3}{ar}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$r^2=2$

よって，$r=\pm\sqrt{2}$

ｉ）$r=\sqrt{2}$ のとき

$a\cdot\sqrt{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より，$a=\dfrac{1}{2}$

したがって，一般項は

$$a_n = \frac{1}{2}\cdot(\sqrt{2})^{n-1}$$
$$= \boldsymbol{\frac{(\sqrt{2})^{n-1}}{2}}$$

また，第 10 項は

$$a_{10} = \frac{(\sqrt{2})^{10-1}}{2}$$
$$= \frac{(\sqrt{2})^9}{2}$$
$$= \frac{16\sqrt{2}}{2} = \boldsymbol{8\sqrt{2}}$$

ii）$r=-\sqrt{2}$ のとき

$a\cdot(-\sqrt{2}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より，$a = -\dfrac{1}{2}$

したがって，一般項は

$$a_n = -\frac{1}{2}\cdot(-\sqrt{2})^{n-1}$$
$$= \boldsymbol{-\frac{(-\sqrt{2})^{n-1}}{2}}$$

また，第 10 項は

$$a_{10} = -\frac{(-\sqrt{2})^{10-1}}{2}$$
$$= -\frac{(-\sqrt{2})^9}{2}$$
$$= -\frac{-16\sqrt{2}}{2} = \boldsymbol{8\sqrt{2}}$$

482（1）求める和は

$$\frac{\frac{1}{12}(3^{10}-1)}{3-1}$$
$$= \frac{59049-1}{12\cdot 2}$$
$$= \frac{59048}{12\cdot 2} = \boldsymbol{\frac{7381}{3}}$$

（2）　与えられた等比数列は，初項 $\dfrac{1}{2}$，公比 $\sqrt{2}$ であるから，一般項は

$$\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{2})^{n-1}$$

16 を第 n 項とすると

$$\frac{1}{2}(\sqrt{2})^{n-1} = 16$$
$$(\sqrt{2})^{n-1} = 32$$
$$(\sqrt{2})^{n-1} = 2^5$$
$$(\sqrt{2})^{n-1} = (\sqrt{2})^{10}$$

よって，$n-1=10$ より，$n=11$

したがって，求める和は

$$\frac{\frac{1}{2}\{(\sqrt{2})^{11}-1\}}{\sqrt{2}-1}$$
$$= \frac{32\sqrt{2}-1}{2(\sqrt{2}-1)}$$
$$= \frac{(32\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{2(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$
$$= \frac{64+31\sqrt{2}-1}{2(2-1)}$$
$$= \boldsymbol{\frac{63+31\sqrt{2}}{2}}$$

483 初項を a，公比を r とすると，題意より

$$\frac{a(r^2-1)}{r-1} = 9\cdots①$$
$$\frac{a(r^4-1)}{r-1} = 45\cdots②$$

①，②より

$$\frac{\frac{a(r^4-1)}{r-1}}{\frac{a(r^2-1)}{r-1}} = \frac{45}{9}$$
$$\frac{r^4-1}{r^2-1} = 5$$
$$r^4-1 = 5(r^2-1)$$
$$r^4-5r^2+4 = 0$$
$$(r^2-1)(r^2-4) = 0$$

$r^2=1$ は，①，②を満たさないので，$r=\pm 2$

i）$r=2$ のとき

①より

$$\frac{a(2^2-1)}{2-1} = 9$$
$$3a = 9$$
$$a = 3$$

ii）$r=-2$ のとき

①より

$$\frac{a\{(-2)^2-1\}}{-2-1} = 9$$
$$-a = 9$$
$$a = -9$$

よって

初項 **3**，公比 **2**

または

初項 $\boldsymbol{-9}$，公比 $\boldsymbol{-2}$

484（1） 与式 $= (2\cdot 1-5)+(2\cdot 2-5)$

$$+(2\cdot 3-5)+(2\cdot 4-5)$$
$$= \boldsymbol{(-3)+(-1)+1+3}$$
$$= \boldsymbol{0}$$

（2） 与式 $= (1+1)^2+(2+1)^2+(3+1)^2$

$$+(4+1)^2+(5+1)^2+(6+1)^2$$
$$= 2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2$$
$$= \boldsymbol{4+9+46+25+36+49}$$
$$= \boldsymbol{139}$$

（3） 与式 $= 1\cdot 2^{1-1}+2\cdot 2^{2-1}+3\cdot 2^{3-1}$

$$= 1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 4$$
$$= \boldsymbol{1+4+12}$$
$$= \boldsymbol{17}$$

485（1）　この数列の第 k 項は

$$1+(k-1)2 = 2k-1$$

また，$2k-1=11$ より，$k=6$ であるから，11 は第 6 項である．

よって

$$\text{与式} = \boldsymbol{\sum_{k=1}^{6}(2k-1)}$$

（2）　この数列の第 k 項は

$$2\cdot 2^{k-1} = 2^k$$

また，$2^k=1024$ より，$k=10$ であるから，1024 は第 10 項である．

よって

$$与式 = \sum_{k=1}^{10} \boldsymbol{2^k}$$

（3）　この数列の第 k 項は，$(-1)^{k-1}$
よって

$$与式 = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{(-1)^{k-1}}$$

（4）　この数列の第 k 項は，$\dfrac{k}{k+1}$
よって

$$与式 = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\frac{k}{k+1}}$$

486（1）

$$\begin{aligned}与式 &= \sum_{k=1}^{n} 2k - \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= 2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= 2\cdot\frac{1}{2}n(n+1) - n \\ &= n(n+1) - n \\ &= n^2 + n - n = \boldsymbol{n^2}\end{aligned}$$

（2）

$$\begin{aligned}与式 &= \sum_{k=1}^{n}(k^2 - k - 2) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 2 \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1) - 2n \\ &= \frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1) - 3(n+1) - 12\} \\ &= \frac{1}{6}n(2n^2 + 3n + 1 - 3n - 3 - 12) \\ &= \frac{1}{6}n(2n^2 - 14) = \boldsymbol{\frac{1}{3}n(n^2 - 7)}\end{aligned}$$

（3）

$$\begin{aligned}与式 &= \sum_{k=1}^{n}\{k(k+1) + k(k-1)\} \\ &= \sum_{k=1}^{n}(k^2 + k + k^2 - k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} 2k^2 = 2\sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &= 2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3}n(n+1)(2n+1)}\end{aligned}$$

（4）

$$\begin{aligned}与式 &= \sum_{k=1}^{n} 2k(2k-1) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(4k^2 - 2k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} 4k^2 - \sum_{k=1}^{n} 2k \\ &= 4\sum_{k=1}^{n} k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} k \\ &= 4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 2\cdot\frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1) - n(n+1) \\ &= \frac{1}{3}n(n+1)\{2(2n+1) - 3\} \\ &= \frac{1}{3}n(n+1)\{4n + 2 - 3\} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3}n(n+1)(4n-1)}\end{aligned}$$

487（1）$\boldsymbol{a_1 = 3,\ a_{k+1} = a_k + 2}$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$

（2）$\boldsymbol{a_1 = 2,\ a_{k+1} = 3a_k}$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$

（3）$\boldsymbol{a_1 = 1,\ a_{k+1} = -a_k - 1}$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$

（4）$\boldsymbol{a_1 = 0,\ a_{k+1} = (a_k{}^2 + 1)^3}$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$

488（1）

$$\begin{aligned}&a_1 = 1 \\ &a_2 = a_1 + 2 \\ &\quad = 1 + 2 = 3 \\ &a_3 = a_2 + 2 \\ &\quad = 3 + 2 = 5 \\ &a_4 = a_3 + 2 \\ &\quad = 5 + 2 = 7 \\ &a_5 = a_4 + 2 \\ &\quad = 7 + 2 = 9\end{aligned}$$

よって，**1，3，5，7，9**

（2）

$$\begin{aligned}&b_1 = 2 \\ &b_2 = 2b_1 - 1 \\ &\quad = 2\cdot 2 - 1 = 3 \\ &b_3 = 2b_2 - 1 \\ &\quad = 2\cdot 3 - 1 = 5 \\ &b_4 = 2b_3 - 1 \\ &\quad = 2\cdot 5 - 1 = 9 \\ &b_5 = 2b_4 - 1 \\ &\quad = 2\cdot 9 - 1 = 17\end{aligned}$$

よって，**2，3，5，9，17**

（3）

$$\begin{aligned}&c_1 = 1 \\ &c_2 = 2c_1 - 1 \\ &\quad = 2\cdot 1 - 1 = 1 \\ &c_3 = 2c_2 - 1 \\ &\quad = 2\cdot c - 1 = 1 \\ &c_4 = 2c_3 - 1 \\ &\quad = 2\cdot 1 - 1 = 1 \\ &c_5 = 2c_4 - 1 \\ &\quad = 2\cdot 1 - 1 = 1\end{aligned}$$

よって，**1，1，1，1，1**

（4）

$$\begin{aligned}&d_1 = -1 \\ &d_2 = d_1 + 2^{1-1} \\ &\quad = -1 + 2^0 = 0 \\ &d_3 = d_2 + 2^{2-1} \\ &\quad = 0 + 2^1 = 2 \\ &d_4 = d_3 + 2^{3-1} \\ &\quad = 2 + 2^2 = 6 \\ &d_5 = d_4 + 2^{4-1} \\ &\quad = 6 + 2^3 = 14\end{aligned}$$

よって，**−1，0，2，6，14**

489（1） $a_1=-1$

$a_2=a_1+3$

$=-1+3$

$a_3=a_2+3$

$=(-1+3)+3=-1+(3+3)$

$a_4=a_3+3$

$=(-1+3+3)+3=-1+(3+3+3)$

$a_n=-1+(\underbrace{3+3+\cdots+3}_{(n-1)\text{ 個}})$

$=-1+(n-1)3$

$\boldsymbol{=3n-4}$

（2） $b_1=1$

$b_2=3b_1+1$

$=3\cdot1+1=3+1$

$b_3=3b_2+1$

$=3(3+1)+1=3^2+3+1$

$b_4=3b_3+1$

$=3(3^2+3+1)+1=3^3+3^2+3+1$

$b_n=3^{n-1}+3^{n-2}+\cdots+3^1+3^0$

$=\dfrac{1(3^n-1)}{3-1}$

$=\boldsymbol{\dfrac{3^n-1}{2}}$

（3） $c_1=2$

$c_2=c_1+1^2$

$=2+1^2$

$c_3=c_2+2^2$

$=2+1^2+2^2$

$c_4=c_3+3^2$

$=2+1^2+2^2+3^2$

$c_n=2+1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2$

$=2+\dfrac{1}{6}(n-1)\{(n-1)+1\}\{2(n-1)+1\}$

$=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}n(n-1)(2n-1)+2}$

490 [1] $n=1$ のとき

$4^1-1=3$ は，3 の倍数である．

よって，$n=1$ のとき，この命題は成り立つ．

[2] $n=k$ のとき，この命題が成り立つ，すなわち 4^k-1 が 3 の倍数であると仮定すると，m を整数として

$4^k-1=3m$

と表すことができるから，

$4^k=3m+1$

である．

$n=k+1$ のときを考えると

$4^{k+1}-1=4^k\cdot4-1$

$=(3m+1)4-1$

$=12m+4-1$

$=12m+3=3(4m+1)$

よって，$4^{k+1}-1$ も 3 の倍数であるから，$n=k+1$ のときも命題は成り立つ．

[1]，[2] から，与えられた命題はすべての自然数 n について成り立つ．

491（1） $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2\cdots$① とする．

[1] $n=1$ のとき

左辺 $=1$，右辺 $=1^2=1$

よって，$n=1$ のとき，①は成り立つ．

[2] $n=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$

両辺に $(2k+1)$ を加えると

$1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)$

$=k^2+(2k+1)$

$=k^2+2k+1$

$=(k+1)^2$

よって，$n=k+1$ のときも，①は成り立つ．

[1]，[2] から，①はすべての自然数 n について成り立つ．

（2） $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\cdots$① とする．

[1] $n=1$ のとき

左辺 $=1^2=1$

右辺 $=\dfrac{1}{6}\cdot1\cdot(1+1)(2\cdot1+1)=1$

よって，$n=1$ のとき，①は成り立つ．

[2] $n=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\dfrac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$

両辺に $(k+1)^2$ を加えると

$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$

$=\dfrac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2$

$=\dfrac{1}{6}(k+1)\{k(2k+1)+6(k+1)\}$

$=\dfrac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)$

$=\dfrac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$

$=\dfrac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}$

よって，$n=k+1$ のときも，①は成り立つ．

[1]，[2] から，①はすべての自然数 n について成り立つ．

492（1） $a_2=\dfrac{a_1}{1+a_1}$

$=\dfrac{1}{1+1}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

$a_3=\dfrac{a_2}{1+a_2}$

$=\dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}$

$=\dfrac{1}{2+1}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

$a_4=\dfrac{a_3}{1+a_3}$

$=\dfrac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}$

$=\dfrac{1}{3+1}=\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$

以上より，$a_n=\boldsymbol{\dfrac{1}{n}}$ と推定できる．

（2） $a_n=\dfrac{1}{n}\cdots$① とする．

[1] $n=1$ のとき

$a_1 = \dfrac{1}{1} = 1$

よって，$n = 1$ のとき，①は成り立つ．

［2］$n = k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$a_k = \dfrac{1}{k}$

漸化式より

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{1 + a_k} = \frac{\frac{1}{k}}{1 + \frac{1}{k}} = \frac{1}{k+1}$$

よって，$n = k + 1$ のときも，①は成り立つ．

［1］，［2］から，①はすべての自然数 n について成り立つので

$a_n = \dfrac{1}{n}$

CHECK

493（1）$a_1 = \dfrac{2 \cdot 1 + 1}{1} = 3$

$a_2 = \dfrac{2 \cdot 2 + 1}{2} = \dfrac{5}{2}$

$a_3 = \dfrac{2 \cdot 3 + 1}{3} = \dfrac{7}{3}$

$a_4 = \dfrac{2 \cdot 4 + 1}{4} = \dfrac{9}{4}$

$a_5 = \dfrac{2 \cdot 5 + 1}{5} = \dfrac{11}{5}$

よって，$\mathbf{3}$，$\boldsymbol{\dfrac{5}{2}}$，$\boldsymbol{\dfrac{7}{3}}$，$\boldsymbol{\dfrac{9}{4}}$，$\boldsymbol{\dfrac{11}{5}}$

（2）$b_1 = 2^{1-1} + 1 = 2$

$b_2 = 2^{2-1} + 1 = 3$

$b_3 = 2^{3-1} + 1 = 5$

$b_4 = 2^{4-1} + 1 = 9$

$b_5 = 2^{5-1} + 1 = 17$

よって，**2，3，5，9，17**

494（1）一般項を a_n，公差を d とすると

$a_n = -58 + (n-1)d$

$a_4 = -49$ なので

$$\begin{aligned} -58 + (4-1)d &= -49 \\ 3d &= -49 + 58 \\ 3d &= 9 \\ d &= 3 \end{aligned}$$

よって，一般項は

$$\begin{aligned} a_n &= -58 + (n-1)3 \\ &= -58 + 3n - 3 \\ &= \boldsymbol{3n - 61} \end{aligned}$$

（2）　第 k 項ではじめて正の数になるとすると

$3k - 61 > 0$

$3k > 61$

$k > \dfrac{61}{3} = 20\dfrac{1}{3}$

よって，**第 21 項**

（3）　第 n 項までの和を S_n とすると

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}n\{2 \cdot (-58) + 3(n-1)\} \\ &= \frac{1}{2}n(3n - 119) \end{aligned}$$

第 k 項までの和をとると，はじめて 0 より大きくなるとすると

$\dfrac{1}{2}k(3k - 119) > 0$

$k(3k - 119) > 0$

これより，$k < 0$，$k > \dfrac{119}{3}$

$k > 0$ であるから，$k > \dfrac{119}{3} = 39\dfrac{2}{3}$

よって，**第 40 項**

495（1）　公比を r とすると

$3r^3 = 81$ であるから，$r^3 = 27$，すなわち $r = 3$

したがって，3 の次の 2 つの項は

$3 \times 3 = 9$

$9 \times 3 = 27$

また，81 の次の項は

$81 \times 3 = 243$

よって，3，$\boxed{\mathbf{9}}$，$\boxed{\mathbf{27}}$，81，$\boxed{\mathbf{243}}$，$\cdots$

（2）　公比を r とすると

$2 \cdot r^2 = \dfrac{1}{2}$ であるから，$r^2 = \dfrac{1}{4}$，すなわち $r = \pm\dfrac{1}{2}$

ｉ）$r = \dfrac{1}{2}$ のとき

2 の前の項は

$2 \div \dfrac{1}{2} = 4$

2 の次の項は

$2 \times \dfrac{1}{2} = 1$

$\dfrac{1}{2}$ の次の項は

$\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$

よって

$\boxed{\mathbf{4}}$，2，$\boxed{\mathbf{1}}$，$\dfrac{1}{2}$，$\boxed{\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}}$，$\cdots$

ii）$r = -\dfrac{1}{2}$ のとき

2 の前の項は

$2 \div \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -4$

2 の次の項は

$2 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -1$

$\dfrac{1}{2}$ の次の項は

$\dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}$

よって

$\boxed{\mathbf{-4}}$，2，$\boxed{\mathbf{-1}}$，$\dfrac{1}{2}$，$\boxed{\boldsymbol{-\dfrac{1}{4}}}$，$\cdots$

496（1）初項を a，公比を r とすると

第 2 項が 2 であるから，$ar = 2$

第 5 項が $\dfrac{27}{4}$ であるから，$ar^4 = \dfrac{27}{4}$

2 式より

$\dfrac{ar^4}{ar} = \dfrac{\frac{27}{4}}{2}$

$r^3 = \dfrac{27}{8}$

よって，$r = \dfrac{3}{2}$

$a \cdot \dfrac{3}{2} = 2$ より，$a = \dfrac{4}{3}$

したがって，一般項は

$a_n = \boldsymbol{\dfrac{4}{3} \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}}$

（2）　初項は 1，公比は，$\dfrac{-\sqrt{2}}{1}=-\sqrt{2}$ であるから，一般項は

$$a_n=1\cdot(-\sqrt{2})^{n-1}=(-\sqrt{2})^{n-1}$$

16 を第 n 項とすると

$$(-\sqrt{2})^{n-1}=16$$
$$(-\sqrt{2})^{n-1}=2^4$$
$$(-\sqrt{2})^{n-1}=\{(-\sqrt{2})^2\}^4$$
$$(-\sqrt{2})^{n-1}=(-\sqrt{2})^8$$

よって，$n-1=8$ より，$n=9$，すなわち，16 は第 9 項である．

よって

$$\begin{aligned}
与式&=\frac{1\cdot\{1-(-\sqrt{2})^9\}}{1-(-\sqrt{2})}\\
&=\frac{1-(-\sqrt{2})^8\cdot(-\sqrt{2})}{1+\sqrt{2}}\\
&=\frac{1-\{(-\sqrt{2})^2\}^4\cdot(-\sqrt{2})}{1+\sqrt{2}}\\
&=\frac{1-2^4\cdot(-\sqrt{2})}{1+\sqrt{2}}\\
&=\frac{1+16\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\\
&=\frac{(1+16\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}\\
&=\frac{1-\sqrt{2}+16\sqrt{2}-32}{1-2}\\
&=\frac{-31+15\sqrt{2}}{-1}\\
&=\mathbf{31-15\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

497（1）　
$$\begin{aligned}
与式&=(1^2+2\cdot1-3)+(2^2+2\cdot2-3)+(3^2+2\cdot3-3)\\
&=\mathbf{0+5+12}\\
&=\mathbf{17}
\end{aligned}$$

（2）　
$$\begin{aligned}
与式&=(-2)^{1-1}+(-2)^{2-1}+(-2)^{3-1}\\
&\qquad+(-2)^{4-1}+(-2)^{5-1}\\
&=(-2)^0+(-2)^1+(-2)^2+(-2)^3+(-2)^4\\
&=\mathbf{1+(-2)+4+(-8)+16}\\
&=\mathbf{11}
\end{aligned}$$

498　この数列の第 k 項は，$(k+1)(k+2)$ であるから

$$\begin{aligned}
与式&=\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n}(k+1)(k+2)}\\
&=\sum_{k=1}^{n}(k^2+3k+2)\\
&=\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}2\\
&=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+2n\\
&=\frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1)+9(n+1)+12\}\\
&=\frac{1}{6}n(2n^2+3n+1+9n+9+12)\\
&=\frac{1}{6}n(2n^2+12n+22)\\
&=\boldsymbol{\frac{1}{3}n(n^2+6n+11)}
\end{aligned}$$

499　$\boldsymbol{a_1=1,\ a_{k+1}=(a_k-1)^2}$ $(k=1,2,3,\cdots)$

500　$a_1=3$

$$\begin{aligned}
a_2&=-a_1-1\\
&=-3-1=-4\\
a_3&=-a_2-1\\
&=-(-4)-1=3\\
a_4&=-a_3-1\\
&=-3-1=-4\\
a_5&=-a_4-1\\
&=-(-4)-1=3
\end{aligned}$$

よって，**3，$\boldsymbol{-4}$，3，$\boldsymbol{-4}$，3**

501　
$$\begin{aligned}
b_1&=1\\
b_2&=5b_1+1\\
&=5\cdot1+1=5+1\\
b_3&=5b_2+1\\
&=5(5+1)+1=5^2+5+1\\
b_4&=5b_3+1\\
&=5(5^2+5+1)+1=5^3+5^2+5+1\\
b_n&=5^{n-1}+5^{n-2}+\cdots+5^1+5^0\\
&=\frac{1(5^n-1)}{5-1}\\
&=\boldsymbol{\frac{5^n-1}{4}}
\end{aligned}$$

502　［1］$n=1$ のとき

$7^1-1=6$ は，6 の倍数である．

よって，$n=1$ のとき，この命題は成り立つ．

［2］$n=k$ のとき，この命題が成り立つ，すなわち 7^k-1 が 6 の倍数であると仮定すると，m を整数として

$$7^k-1=6m$$

と表すことができるから，

$$7^k=6m+1$$

である．

$n=k+1$ のときを考えると

$$\begin{aligned}
7^{k+1}-1&=7^k\cdot7-1\\
&=(6m+1)7-1\\
&=42m+7-1\\
&=42m+6=6(7m+1)
\end{aligned}$$

よって，$7^{k+1}-1$ も 6 の倍数であるから，$n=k+1$ のときも命題は成り立つ．

［1］，［2］から，与えられた命題はすべての自然数 n について成り立つ．

503（1）　
$$\begin{aligned}
a_2&=2-\frac{1}{a_1}\\
&=2-\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{5}{3}}\\
a_3&=2-\frac{1}{a_2}\\
&=2-\frac{1}{\frac{5}{3}}\\
&=2-\frac{3}{5}=\boldsymbol{\frac{7}{5}}
\end{aligned}$$

$$a_4 = 2 - \frac{1}{a_3} = 2 - \frac{1}{\frac{7}{5}} = 2 - \frac{5}{7} = \boldsymbol{\frac{9}{7}}$$

以上より，$a_n = \boldsymbol{\dfrac{2n+1}{2n-1}}$ と推定できる．

（2）$a_n = \dfrac{2n+1}{2n-1} \cdots$ ① とする．

［1］$n = 1$ のとき

$$a_1 = \frac{2 \cdot 1 + 1}{2 \cdot 1 - 1} = \frac{3}{1} = 3$$

よって，$n = 1$ のとき，①は成り立つ．

［2］$n = k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$$a_k = \frac{2k+1}{2k-1}$$

漸化式より

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2 - \frac{1}{a_k} \\ &= 2 - \frac{1}{\frac{2k+1}{2k-1}} \\ &= 2 - \frac{2k-1}{2k+1} \\ &= \frac{2(2k+1)}{2k+1} - \frac{2k-1}{2k+1} \\ &= \frac{4k+2-(2k-1)}{2k+1} \\ &= \frac{2k+3}{2k+1} \\ &= \frac{2(k+1)+1}{2(k+1)-1} \end{aligned}$$

よって，$n = k+1$ のときも，①は成り立つ．

［1］，［2］から，①はすべての自然数 n について成り立つので

$$a_n = \frac{2n+1}{2n-1}$$

STEP UP

504（1）　公比を r，末項を第 n 項とすると，末項が 486 であるから

$$2 \cdot r^{n-1} = 486$$

これより，$r^{n-1} = 243 \cdots$ ①

また，$r \fallingdotseq 1$ であり，和が 728 であるから

$$\frac{2(1-r^n)}{1-r} = 728$$

これより，$1 - r^n = 364(1-r)$

整理すると，$r^n - 364r - 363 = 0 \cdots$ ②

①より，$r^n = r^{n-1} \cdot r = 243r$ であるから，これを②に代入して

$$243r - 364r - 363 = 0$$

$$121r = 363$$

よって，$\boldsymbol{r = 3}$

（2）　初項を a，公比を r とすると，$a \fallingdotseq 0$，$r \fallingdotseq 1$ であるから

$$S_5 = \frac{a(1-r^5)}{1-r}$$

$$S_{10} = \frac{a(1-r^{10})}{1-r}$$

また，$\dfrac{S_5}{S_{10}} = \dfrac{1}{33}$ より，$S_5 = S_{10} \cdot \dfrac{1}{33}$ であるから

$$\frac{a(1-r^5)}{1-r} = \frac{a(1-r^{10})}{1-r} \cdot \frac{1}{33}$$

これより，$33(1-r^5) = 1 - r^{10}$

整理すると，$r^{10} - 33r^5 + 32 = 0$

$r^5 = R$ とおいて，これを解くと

$$R^2 - 33R + 32 = 0$$

$$(R-1)(R-32) = 0$$

よって，$R = 1,\ 32$，すなわち，$r^5 = 1,\ 32$

ここで，$r \fallingdotseq 1$ より，$r^5 \fallingdotseq 1$ であるから，$r^5 = 32 = 2^5$

したがって，$\boldsymbol{r = 2}$

505　与えられた等比数列の第 n 項までの和は

$$\frac{1(2^n-1)}{2-1} = 2^n - 1$$

第 n 項までの和が 1 兆より大きくなるとすると

$$2^n - 1 > 10^{12}$$

ここで，2^n の一の位は偶数であるから，$2^n - 1$ の一の位は 0 にはならない．一方，10^{12} の一位は 0 であるから，$2^n > 10^{12}$ を満たす n は，$2^n - 1 > 10^{12}$ も満たす．

そこで，$2^n > 10^{12}$ の両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} 2^n > \log_{10} 10^{12}$$

$$n \log_{10} 2 > 12$$

$$n > \frac{12}{\log_{10} 2} = \frac{12}{0.3010} = 39.8\cdots$$

よって，**第 40 項**

506（1）

$$\begin{aligned} a_{2k-1} &= (2k-1)^2 - (2k-1) \\ &= 4k^2 - 4k + 1 - 2k + 1 \\ &= \boldsymbol{4k^2 - 6k + 2} \end{aligned}$$

（2）

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \sum_{k=1}^{n} (4k^2 - 6k + 2) \\ &= 4\sum_{k=1}^{n} k^2 - 6\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 2 \\ &= 4 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - 6 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + 2n \\ &= \frac{2}{3} n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1) + 2n \\ &= \frac{1}{3} n\{2(n+1)(2n+1) - 9(n+1) + 6\} \\ &= \frac{1}{3} n\{2(2n^2+3n+1) - 9n - 9 + 6\} \\ &= \frac{1}{3} n(4n^2 + 6n + 2 - 9n - 3) \\ &= \frac{1}{3} n(4n^2 - 3n - 1) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3} n(n-1)(4n+1)} \end{aligned}$$

507（1）　この数列の第 k 項は

$$k\{n-(k-1)\} = k(n-k+1)$$

と表されるので

$$\text{与式} = \sum_{k=1}^{n} k(n-k+1)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\{(n+1)k - k^2\}$$
$$= (n+1)\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2$$
$$= (n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$= \frac{1}{2}n(n+1)^2 - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$= \frac{1}{6}n(n+1)\{3(n+1)-(2n+1)\}$$
$$= \frac{1}{6}n(n+1)(3n+3-2n-1)$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)}$$

（2）　この数列の初項は，1

第 2 項は，$1+10$

第 3 項は，$1+10+100$

となるので，第 n 項は

$$1+10+100+\cdots+10^{n-1} = \frac{1(10^n-1)}{10-1} = \frac{10^n-1}{9}$$

よって

$$\text{与式} = \sum_{k=1}^{n}\frac{10^k-1}{9}$$
$$= \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n}(10^k-1)$$
$$= \frac{1}{9}\left\{\frac{10(10^n-1)}{10-1} - n\right\}$$
$$= \frac{1}{9}\cdot\frac{10^{n+1}-10-9n}{9}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{81}(10^{n+1}-9n-10)}$$

508 ［1］$n=1$ のとき

左辺 $= (\cos\theta + i\sin\theta)^1 = \cos\theta + i\sin\theta$

右辺 $= \cos 1\theta + i\sin 1\theta = \cos\theta + i\sin\theta$

よって，$n=1$ のとき，与えられた等式は成り立つ．

［2］$n=k$ のとき，与えられた等式が成り立つと仮定すると

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^k = \cos k\theta + i\sin k\theta$$

この等式の両辺に $\cos\theta + i\sin\theta$ をかけると

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{k+1} = (\cos k\theta + i\sin k\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)$$

ここで

$$\text{右辺} = (\cos k\theta + i\sin k\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$= \cos k\theta\cos\theta + i\cos k\theta\sin\theta + i\sin k\theta\cos\theta + i^2\sin k\theta\sin\theta$$
$$= \cos k\theta\cos\theta + i\cos k\theta\sin\theta + i\sin k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta$$
$$= \cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta + i(\cos k\theta\sin\theta + \sin k\theta\cos\theta)$$
$$= \cos(k\theta+\theta) + i\sin(k\theta+\theta)$$
$$= \cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta$$

よって，$(\cos\theta + i\sin\theta)^{k+1} = \cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta$

であるから，$n=k+1$ のときも，与えられた等式は成り立つ．

［1］，［2］から，与えられた等式はすべての自然数 n について成り立つ．

509　まず，$\dfrac{1}{k(k+2)}$ を部分分数に分解する．

$\dfrac{1}{k(k+2)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+2}\cdots$① が k についての恒等式となるように，a，b の値を定める．

① の両辺に $k(k+2)$ をかけると

$1 = a(k+2) + bk$

$1 = (a+b)k + 2a$

これが，k についての恒等式であるためには

$$\begin{cases} a+b=0 & \cdots② \\ 2a=1 & \cdots③ \end{cases}$$

③ より，$a = \dfrac{1}{2}$

これを，② に代入して，$b = -\dfrac{1}{2}$

よって，

$$\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$$

以上より

$$\text{与式} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3(n+1)(n+2) - 2(n+2) - 2(n+1)}{2(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{3(n^2+3n+2) - 2n - 4 - 2n - 2}{4(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{3n^2+9n+6-4n-6}{4(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{3n^2+5n}{4(n+1)(n+2)} = \boldsymbol{\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}}$$

510（1）

$$\text{左辺} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}$$
$$= \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1})^2-(\sqrt{k})^2}$$
$$= \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(k+1)-k}$$
$$= \sqrt{k+1}-\sqrt{k} = \text{右辺}$$

（2）

$$\text{与式} = \sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$
$$= (\sqrt{2}-\sqrt{1}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{n}-\sqrt{n-1}) + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$
$$= -\sqrt{1} + \sqrt{n+1} = \boldsymbol{\sqrt{n+1}-1}$$

511　第 k 項は

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{(k+1)-1}{(k+1)!}$$
$$= \frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!}$$
$$= \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

と変形できるので

$$与式 = \left(\frac{1}{1\,!} - \frac{1}{2\,!}\right) + \left(\frac{1}{2\,!} - \frac{1}{3\,!}\right) + \cdots$$
$$\cdots + \left\{\frac{1}{(n-1)\,!} - \frac{1}{n\,!}\right\} + \left\{\frac{1}{n\,!} - \frac{1}{(n+1)\,!}\right\}$$
$$= \frac{1}{1\,!} - \frac{1}{(n+1)\,!} = \mathbf{1 - \frac{1}{(n+1)\,!}}$$

512　$S_n = 1 + 3\cdot 2 + 5\cdot 2^2 + \cdots + (2n-1)2^{n-1} \cdots$① とする．

① の両辺に 2 をかけると

$$2S_n = 1\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + 5\cdot 2^3 + \cdots + (2n-1)2^n \cdots ②$$

① − ②

$$\begin{array}{rrl} & S_n & = 1 + 3\cdot 2 + 5\cdot 2^2 + \cdots + (2n-1)2^{n-1} \\ -) & 2S_n & = \qquad 1\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + \cdots + (2n-3)2^{n-1} + (2n-1)2^n \\ \hline & -S_n & = 1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 2^2 + \cdots + 2\cdot 2^{n-1} - (2n-1)2^n \end{array}$$

よって

$$\begin{aligned} -S_n &= 1 + (2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n) - (2n-1)2^n \\ &= 1 + \frac{2^2(2^{n-1}-1)}{2-1} - (2n-1)2^n \\ &= 1 + 2^{n+1} - 4 - (2n-1)2^n \\ &= 2^n\{2 - (2n-1)\} - 3 \\ &= 2^n(-2n+3) - 3 \end{aligned}$$

したがって，$\boldsymbol{S_n = (2n-3)2^n + 3}$

513（1）　$a_{k+1} = 2a_k - 1$ が，$a_{k+1} - \alpha = 2(a_k - \alpha)$ と変形できるとすると

$$a_{k+1} - \alpha = 2a_k - 2\alpha$$
$$a_{k+1} = 2a_k - \alpha$$

これより，$-\alpha = -1$，すなわち，$\alpha = 1$

よって，この漸化式は

$$a_{k+1} - 1 = 2(a_k - 1)$$

と変形できる．

数列 $\{a_k - 1\}$ は，初項 $a_1 - 1 = 2 - 1 = 1$，公比 2 の等比数列だから

$$\begin{aligned} a_n - 1 &= 1\cdot 2^{n-1} \\ &= 2^{n-1} \end{aligned}$$

したがって，$\boldsymbol{a_n = 2^{n-1} + 1}$

（2）　$a_{k+1} = 3a_k + 4$ が，$a_{k+1} - \alpha = 3(a_k - \alpha)$ と変形できるとすると

$$a_{k+1} - \alpha = 3a_k - 3\alpha$$
$$a_{k+1} = 3a_k - 2\alpha$$

これより，$-2\alpha = 4$，すなわち，$\alpha = -2$

よって，この漸化式は

$$a_{k+1} + 2 = 3(a_k + 2)$$

と変形できる．

数列 $\{a_k + 2\}$ は，初項 $a_1 + 2 = -1 + 2 = 1$，公比 3 の等比数列だから

$$\begin{aligned} a_n + 2 &= 1\cdot 3^{n-1} \\ &= 3^{n-1} \end{aligned}$$

したがって，$\boldsymbol{a_n = 3^{n-1} - 2}$

（3）　$a_{k+1} = -2a_k + 1$ が，$a_{k+1} - \alpha = -2(a_k - \alpha)$ と変形できるとすると

$$a_{k+1} - \alpha = -2a_k + 2\alpha$$
$$a_{k+1} = -2a_k + 3\alpha$$

これより，$3\alpha = 1$，すなわち，$\alpha = \frac{1}{3}$

よって，この漸化式は

$$a_{k+1} - \frac{1}{3} = -2\left(a_k - \frac{1}{3}\right)$$

と変形できる．

数列 $\left\{a_k - \frac{1}{3}\right\}$ は，初項 $a_1 - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$，公比 -2 の等比数列だから

$$\begin{aligned} a_n - \frac{1}{3} &= \frac{2}{3}\cdot(-2)^{n-1} \\ &= -\frac{-2}{3}\cdot(-2)^{n-1} \\ &= -\frac{1}{3}\cdot(-2)^n \end{aligned}$$

したがって，　$a_n = -\frac{1}{3}\cdot(-2)^n + \frac{1}{3}$

$$= \mathbf{\frac{1-(-2)^n}{3}}$$

※ この問題における α の値は，次のようにして，漸化式における a_{k+1} と a_k を α に置き換えた方程式（特性方程式）を解くことによっても求められる．

（1）　$\alpha = 2\alpha - 1$
$-\alpha = -1$
$\alpha = 1$

（2）　$\alpha = 3\alpha + 4$
$-2\alpha = 4$
$\alpha = -2$

（3）　$\alpha = -2\alpha + 1$
$3\alpha = 1$
$\alpha = \frac{1}{3}$

514（1）　[1] $n = 5$ のとき

左辺 $= 2^5 = 32$

右辺 $= 5^2 = 25$

よって，$n = 5$ のとき，与えられた不等式は成り立つ．

[2] $n = k$ のとき，与えられた不等式が成り立つと仮定すると

$$2^k > k^2$$

この不等式の両辺に $2\,(>0)$ をかけると

$$2^k\cdot 2 > k^2\cdot 2$$
$$2^{k+1} > 2k^2$$

ここで

$$\begin{aligned} 2k^2 - (k+1)^2 &= 2k^2 - (k^2 + 2k + 1) \\ &= k^2 - 2k - 1 \\ &= (k-1)^2 - 1 - 1 = (k-1)^2 - 2 \end{aligned}$$

$n \geqq 5$ のとき，$(k-1)^2 - 2 \geqq 14 > 0$ であるから

$$2k^2 - (k+1)^2 > 0$$

すなわち，$2k^2 > (k+1)^2$

したがって，$2^{k+1} > 2k^2 > (k+1)^2$ であるから

$$2^{k+1} > (k+1)^2$$

よって，$n = k + 1$ のときも，与えられた不等式は成り立つ．

[1]，[2] から，与えられた不等式は $n \geqq 5$ を満たすすべての自然数 n について成り立つ．

（2）　[1] $n = 2$ のとき

左辺 $= \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$

右辺 $= \dfrac{2-1}{2} = \dfrac{1}{2}$

よって，$n=2$ のとき，与えられた不等式は成り立つ．

［2］$n=k$ のとき，与えられた不等式が成り立つと仮定すると

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<\frac{k-1}{k}$$

この不等式の両辺に $\dfrac{1}{(k+1)^2}$ を加えると

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2} < \frac{k-1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$$

ここで

$$\frac{(k+1)-1}{k+1}-\left\{\frac{k-1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\right\}$$
$$=\frac{k\cdot k(k+1)-(k-1)(k+1)^2-k}{k(k+1)^2}$$
$$=\frac{k^3+k^2-(k^3+k^2-k-1)-k}{k(k+1)^2}$$
$$=\frac{1}{k(k+1)^2}$$

$k \geqq 2$ のとき，$\dfrac{1}{k(k+1)^2}>0$ であるから

$$\frac{(k+1)-1}{k+1}-\left\{\frac{k-1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\right\}>0$$

すなわち，$\dfrac{(k+1)-1}{k+1} > \dfrac{k-1}{k}+\dfrac{1}{(k+1)^2}$

したがって

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2} < \frac{k-1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2} < \frac{(k+1)-1}{k+1}$$

であるから

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2} < \frac{(k+1)-1}{k+1}$$

よって，$n=k+1$ のときも，与えられた不等式は成り立つ．

［1］，［2］から，与えられた不等式は $n \geqq 2$ を満たすすべての自然数 n について成り立つ．

PLUS

515　展開式の一般項は

$\dfrac{8\,!}{p\,!\,q\,!\,r\,!}x^py^qz^r$（ただし，$p+q+r=8$）と表される．

$x^4y^2z^2$ の係数は，$p=4$，$q=2$，$r=2$ より

$$\frac{8\,!}{4\,!\,2\,!\,2\,!}=\mathbf{420}$$

516　展開式の一般項は

$$\frac{6\,!}{p\,!\,q\,!\,r\,!}x^py^q2^r=\left(\frac{6\,!}{p\,!\,q\,!\,r\,!}\times 2^r\right)x^py^q$$

（ただし，$p+q+r=6$）と表される．

x^2y^3 の係数は，$p=2$，$q=3$，$r=1$ より

$$\frac{6\,!}{2\,!\,3\,!\,1\,!}\times 2^1=\mathbf{120}$$

517（1）　$\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$b_k=a_{k+1}-a_k=4k+1$ であるから

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$
$$=7+\sum_{k=1}^{n-1}(4k+1)$$
$$=7+4\sum_{k=1}^{n-1}k+\sum_{k=1}^{n-1}1$$
$$=7+4\cdot\frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\}+(n-1)$$
$$=7+2n(n-1)+(n-1)$$
$$=7+2n^2-2n+n-1$$
$$=2n^2-n+6\ \cdots①$$

$n=1$ のとき，$2\cdot1^2-1+6=7$ で $a_1=7$ に等しい．

よって，① は $n=1$ のときも成り立つ．

したがって，$\boldsymbol{a_n=2n^2-n+6}$

（2）　$\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$b_k=a_{k+1}-a_k=k^2$ であるから

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$
$$=0+\sum_{k=1}^{n-1}k^2$$
$$=\frac{1}{6}(n-1)\{(n-1)+1\}\{2(n-1)+1\}$$
$$=\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)\ \cdots①$$

$n=1$ のとき，$\dfrac{1}{6}\cdot1(1-1)(2\cdot1-1)=0$ で $a_1=0$ に等しい．

よって，① は $n=1$ のときも成り立つ．

したがって，$\boldsymbol{a_n=\dfrac{1}{6}n(n-1)(2n-1)}$

（3）　$\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると

$b_k=a_{k+1}-a_k=\dfrac{1}{k(k+1)}$ である．

ここで，$\dfrac{1}{k(k+1)}$ を部分分数に分解する．

$\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{p}{k}+\dfrac{q}{k+1}$ が k についての恒等式になるように，p，q の値を定める．

右辺 $=\dfrac{p(k+1)+qk}{k(k+1)}$

$=\dfrac{(p+q)k+p}{k(k+1)}$

よって，$\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{(p+q)k+p}{k(k+1)}$ より

$p+q=0$，$p=1$

これより，$p=1$，$q=-1$ であるから

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$
$$=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(k+1)}=1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots$$
$$\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$
$$=1+1-\frac{1}{n}=2-\frac{1}{n}\ \cdots①$$

$n=1$ のとき，$2-\dfrac{1}{1}=1$ で $a_1=1$ に等しい．
よって，① は $n=1$ のときも成り立つ．
したがって，$\boldsymbol{a_n=2-\dfrac{1}{n}}$

518（1）　3 個とも白玉である事象を A，3 個とも黒玉である事象を B とすると，求める確率は $P(A\cup B)$ である．
起こり得る場合は全部で ${}_7\mathrm{C}_3$ 通りあり，事象 A と事象 B は排反であるから

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)\\&=\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}+\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}\\&=\frac{1}{35}+\frac{4}{35}\\&=\frac{5}{35}=\boldsymbol{\frac{1}{7}}\end{aligned}$$

（2）　3 個の中に黒玉が 2 個含まれている事象を A，黒玉が 3 個含まれている事象を B とすると，求める確率は $P(A\cup B)$ である．
起こり得る場合は全部で ${}_7\mathrm{C}_3$ 通りあり，事象 A と事象 B は排反であるから

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)\\&=\frac{{}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_3}+\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}\\&=\frac{6\cdot3}{35}+\frac{4}{35}\\&=\frac{18+4}{35}=\boldsymbol{\frac{22}{35}}\end{aligned}$$

519　起こり得るすべての場合は，${}_5\mathrm{P}_3$ 通りである．
百の位が 1 である数はすべて 250 より小さく，その個数は，${}_4\mathrm{P}_2$ 個．
百の位が 2 である数のうち，250 より小さいのは，十の位が 4 以下，すなわち 1，3，4 の場合であるから，その個数は，$3\times{}_3\mathrm{P}_1$ 個．
よって，求める確率は

$$\begin{aligned}\frac{{}_4\mathrm{P}_2}{{}_5\mathrm{P}_3}+\frac{3\times{}_3\mathrm{P}_1}{{}_5\mathrm{P}_3}&=\frac{{}_4\mathrm{P}_2+3\times{}_3\mathrm{P}_1}{{}_5\mathrm{P}_3}\\&=\frac{4\cdot3+3\cdot3}{5\cdot4\cdot3}\\&=\frac{21}{5\cdot4\cdot3}=\boldsymbol{\frac{7}{20}}\end{aligned}$$

520　100 個の製品の中から 2 個を取り出すときの，起こり得るすべての場合は，${}_{100}\mathrm{C}_2$ 通りである．
不良品が 1 個も含まれない事象を A とすると，2 個とも不良品ではない場合は，${}_{95}\mathrm{C}_2$ 通りあるので

$$P(A)=\frac{{}_{95}\mathrm{C}_2}{{}_{100}\mathrm{C}_2}=\frac{\dfrac{95\cdot94}{2\cdot1}}{\dfrac{100\cdot99}{2\cdot1}}=\frac{893}{990}$$

不良品が少なくとも 1 個含まれるという事象は，A の余事象であるから，求める確率は

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{893}{990}=\boldsymbol{\frac{97}{990}}$$

521　20 本のくじの中から 4 本を引くときの，起こり得るすべての場合は，${}_{20}\mathrm{C}_4$ 通りである．

（1）　1 等が 1 本も当たらない事象を A とすると，4 本とも 1 等以外のくじを引く場合は，${}_{17}\mathrm{C}_4$ 通りであるから

$$P(A)=\frac{{}_{16}\mathrm{C}_4}{{}_{20}\mathrm{C}_4}=\frac{\dfrac{17\cdot16\cdot15\cdot14}{4\cdot3\cdot2\cdot1}}{\dfrac{20\cdot19\cdot18\cdot17}{4\cdot3\cdot2\cdot1}}=\frac{28}{57}$$

少なくとも 1 本が 1 等であるという事象は，A の余事象であるから，求める確率は

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{28}{57}=\boldsymbol{\frac{29}{57}}$$

（2）　1 等または 2 等が 1 本も当たらない事象を A，1 等または 2 等が 1 本当たる事象を B とする．
1 等と 2 等のくじの本数は合わせて 8 本であるから

$$P(A)=\frac{{}_{12}\mathrm{C}_4}{{}_{20}\mathrm{C}_4}$$
$$P(B)=\frac{{}_8\mathrm{C}_1\cdot{}_{12}\mathrm{C}_3}{{}_{20}\mathrm{C}_4}$$

少なくとも 2 本が 1 等または 2 等であるという事象は，$A\cup B$ の余事象であり，A と B は排反であるから，求める確率は

$$\begin{aligned}P(\overline{A\cup B})&=1-P(A\cup B)\\&=1-\{P(A)+P(B)\}\\&=1-\left(\frac{{}_{12}\mathrm{C}_4}{{}_{20}\mathrm{C}_4}+\frac{{}_8\mathrm{C}_1\cdot{}_{12}\mathrm{C}_3}{{}_{20}\mathrm{C}_4}\right)\\&=1-\frac{{}_{12}\mathrm{C}_4+{}_8\mathrm{C}_1\cdot{}_{12}\mathrm{C}_3}{{}_{20}\mathrm{C}_4}\\&=1-\frac{\dfrac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{4\cdot3\cdot2\cdot1}+8\cdot\dfrac{12\cdot11\cdot10}{3\cdot2\cdot1}}{\dfrac{20\cdot19\cdot18\cdot17}{4\cdot3\cdot2\cdot1}}\\&=1-\frac{495+1760}{4845}=1-\frac{2255}{4845}\\&=1-\frac{451}{969}=\boldsymbol{\frac{518}{969}}\end{aligned}$$

522　起こり得るすべての場合は，6^3 通りである．

（1）　目の和が 5 以下となるのは，和が 3，4，5 の場合である．
また，目の出方を，(a,b,c) で表す．
i）　和が 3 の場合　$(1,1,1)$ $\cdots$1 通り．
ii）　和が 4 の場合　$(1,1,2),(1,2,1)(2,1,1)$ $\cdots$3 通り．
iii）　和が 5 の場合　$(1,1,3),(1,3,1)(3,1,1)$
$(1,2,2),(2,1,2)(2,2,1)$ $\cdots$6 通り．
すなわち，$1+3+6=10$ 通りであるから，求める確率は

$$\frac{10}{6^3}=\frac{10}{216}=\boldsymbol{\frac{5}{108}}$$

（2）　3 個のさいころのうち，少なくとも 1 個の目が偶数であれば積は偶数になるので，この事象の余事象，つまり，目の積が奇数になる場合を考える．
3 個の目がすべて奇数 (1,3,5 の 3 通り) であれば，積は奇数になるので，このような目の出方は，3^3 通りである．よって，求める確率は

$$1-\frac{3^3}{6^3}=1-\frac{1}{8}=\boldsymbol{\frac{7}{8}}$$

∎