7章　場合の数と数列

BASIC

432 （1）504 を素因数分解すると，

$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$

よって，約数の個数は，

$(3+1)(2+1)(1+1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

24 個

（2）216 を素因数分解すると，

$216 = 2^3 \times 3^3$

よって，約数の個数は，

$(3+1)(3+1) = 4 \cdot 4 = 16$

16 個

（3）2100 を素因数分解すると，

$2100 = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7$

よって，約数の個数は，

$(2+1)(1+1)(2+1)(1+1) = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 36$

36 個

433　$x + 4y \leqq 20$ より，$x \leqq 20 - 4y$

i）$y = 1$ のとき

$1 \leqq x \leqq 16$ であるから，16 個

ii）$y = 2$ のとき

$1 \leqq x \leqq 12$ であるから，12 個

iii）$y = 3$ のとき

$1 \leqq x \leqq 8$ であるから，8 個

iv）$y = 4$ のとき

$1 \leqq x \leqq 4$ であるから，4 個

よって，和の法則より

$16 + 12 + 8 + 4 =$ **40 個**

434 （1）　$x + y + z = 8$ より，$x + y = 8 - z$

i）$z = 1$ のとき，　$x + y = 7$

これを満たす x, y の組は，4 通り

ii）$z = 2$ のとき，　$x + y = 6$

これを満たす x, y の組は，5 通り

iii）$z = 3$ のとき，　$x + y = 5$

これを満たす x, y の組は，4 通り

iv）$z = 4$ のとき，　$x + y = 4$

これを満たす x, y の組は，3 通り

v）$z = 5$ のとき，　$x + y = 3$

これを満たす x, y の組は，2 通り

よって，和の法則より

$4 + 5 + 4 + 3 + 2 =$ **18 個**

（2）　$x + y + z = 8$ より，$x + y = 8 - z$

i）$z = 0$ のとき，　$x + y = 8$

これを満たす x, y の組は，9 通り

ii）$z = 1$ のとき，　$x + y = 7$

これを満たす x, y の組は，8 通り

iii）$z = 2$ のとき，　$x + y = 6$

これを満たす x, y の組は，7 通り

iv）$z = 3$ のとき，　$x + y = 5$

これを満たす x, y の組は，6 通り

v）$z = 4$ のとき，　$x + y = 4$

これを満たす x, y の組は，5 通り

vi）$z = 5$ のとき，　$x + y = 3$

これを満たす x, y の組は，4 通り

vii）$z = 6$ のとき，　$x + y = 2$

これを満たす x, y の組は，3 通り

viii）$z = 7$ のとき，　$x + y = 1$

これを満たす x, y の組は，2 通り

ix）$z = 8$ のとき，　$x + y = 0$

これを満たす x, y の組は，1 通り

よって，和の法則より

$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 =$ **45 個**

435　赤，青，白のさいころの目の数を $x,\ y,\ z$ で表すと，$x + y = 2z$ となる整数の組を考えればよい．ただし，$1 \leqq x \leqq 6,\ 1 \leqq y \leqq 6$，$1 \leqq z \leqq 6$，

i）$z = 1$ のとき，　$x + y = 2$

これを満たす x, y の組は，1 通り

ii）$z = 2$ のとき，　$x + y = 4$

これを満たす x, y の組は，3 通り

iii）$z = 3$ のとき，　$x + y = 6$

これを満たす x, y の組は，5 通り

iv）$z = 4$ のとき，　$x + y = 8$

これを満たす x, y の組は，5 通り

v）$z = 5$ のとき，　$x + y = 10$

これを満たす x, y の組は，3 通り

vi）$z = 6$ のとき，　$x + y = 12$

これを満たす x, y の組は，1 通り

よって，和の法則より，$1 + 3 + 5 + 5 + 3 + 1 = 18$

18 通り

436 （1）与式 $= 5 \cdot 4 \cdot 3$

$= \mathbf{60}$

（2）与式 $= 7 \cdot 6$

$= \mathbf{42}$

（3）与式 $= \mathbf{99}$

（4）与式 $= \dfrac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdots 11}{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdots 11 \cdot 10}$

$= \mathbf{\dfrac{1}{10}}$

437 （1）与式 $= 3 \cdot 2 \cdot 1$

$= \mathbf{6}$

（2）与式 $= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

$= \mathbf{720}$

（3）与式 $= \dfrac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$

$= 20 \cdot 19 = \mathbf{380}$

（4）与式 $= \dfrac{(2n+1)2n(2n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{2n(2n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}$

$= \boldsymbol{2n+1}$

438　両端の子音は，3 個の文字 b，c，d の中から 2 個を選んで並べればよいので，${}_6\mathrm{P}_2$ 通りの並べ方があり，この各の並べ方に対して，間の 3 個の文字の並べ方は $3!$ 通りあるので，積の法則より

${}_3\mathrm{P}_2 \times 3! = 3\cdot 2\times 3\cdot 2\cdot 1 = $ **36 通り**

439（1）　13 枚のハートの中から 3 枚を選んで並べればよいので

${}_{13}\mathrm{P}_3 = 13\cdot 12\cdot 11 = $ **1716 通り**

（2）　ハート以外のカードの枚数は，$13\times 3 = 39$ 枚で，この中から 3 枚を選んで並べればよいので

${}_{39}\mathrm{P}_3 = 39\cdot 38\cdot 37 = $ **54834 通り**

440（1）　5 個の数字を，4 個並べる重複順列であるから

$5^4 = $ **625 個**

（2）　1 の位には 2，4 のいずれかの数字を並べればよいので，2 通り．この各の並べ方に対して，残りの 3 つの位の数字は，5 個の数字の重複順列であるから

$2\times 5^3 = $ **250 個**

441（1）　それぞれのさいころに 6 通りの目の出方があるので

$6^3 = $ **216 通り**

（2）　奇数の目は，1，3，5 の 3 通りで，それぞれのさいころに，この 3 通りの目の出方があるので

$3^3 = $ **27 通り**

（3）　小の目の一の位の数字は 1，3，5 の 3 通りあり，その各に対して，残りの位の目の出方はそれぞれ 6 通りあるので

$3\times 6^2 = $ **108 通り**

442（1）与式 $= \dfrac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = \mathbf{10}$

（2）与式 $= \dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \mathbf{210}$

（3）与式 $= {}_{11}\mathrm{C}_{11-9}$

$= {}_{11}\mathrm{C}_2 = \dfrac{11\cdot 10}{2\cdot 1} = \mathbf{55}$

（4）与式 $= \dfrac{n(n-1)}{2\cdot 1}$

$= \boldsymbol{\dfrac{n(n-1)}{2}}$

（5）与式 $= {}_n\mathrm{C}_{n-(n-1)}$

$= {}_n\mathrm{C}_1 = \boldsymbol{n}$

443（1）　9 枚の中から 3 枚を選ぶ組み合わせだから

${}_9\mathrm{C}_3 = \dfrac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1} = $ **84 通り**

（2）　偶数のカードは，2，4，6，8 の 4 枚で，この中から 3 枚を選ぶ組み合わせだから

${}_4\mathrm{C}_3 = {}_4\mathrm{C}_1 = $ **4 通り**

（3）　3 枚のカードの数字の和が偶数になるのは

- 3 枚とも偶数の場合
- 1 枚が偶数で，2 枚が奇数の場合

がある．

i）3 枚とも偶数の場合

（2）より，4 通り

ii）1 枚が偶数で，2 枚が奇数の場合

偶数のカード 1 枚の選び方は，${}_4\mathrm{C}_1$ 通り

奇数のカードは，1，3，5，7，9 の 5 枚で，この中から 2 枚を選ぶ組み合わせは

${}_5\mathrm{C}_2$ 通り

よって

${}_4\mathrm{C}_1\cdot {}_5\mathrm{C}_2 = 4\cdot \dfrac{5\cdot 4}{2\cdot 1}$

$= 4\cdot 10 = 40$ 通り

i)，ii) は同時には起こらないので

$4 + 40 = $ **44 通り**

444（1）　1 班と 2 班の合計 13 人の中から 5 人を選ぶ組み合わせだから

${}_{13}\mathrm{C}_5 = \dfrac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = $ **1287 通り**

（2）　1 班 6 人の中から 2 人選ぶ組み合わせの数は，${}_6\mathrm{C}_2$ 通り

この各の選び方に対して，2 班 7 人の中から 3 人選ぶ組み合わせの数は，${}_7\mathrm{C}_3$ 通り

よって

${}_6\mathrm{C}_2\cdot {}_7\mathrm{C}_3 = \dfrac{6\cdot 5}{2\cdot 1}\cdot \dfrac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}$

$= $ **525 通り**

（3）　すべての選び方から，1 班の人が一人もいない（2 班の人だけ）の場合と 2 班の人が 1 人もいない（1 班の人だけ）の場合を引けばよい．

2 班の人だけになる選び方は，${}_7\mathrm{C}_5$ 通り

1 班の人だけになる選び方は，${}_6\mathrm{C}_5$ 通り

すべての選び方は，（1）より，1287 通りであるから

$1287 - ({}_7\mathrm{C}_5 + {}_6\mathrm{C}_5)$

$= 1287 - ({}_7\mathrm{C}_2 + {}_6\mathrm{C}_1)$

$= 1287 - \left(\dfrac{7\cdot 6}{2\cdot 1} + 6\right)$

$= 1287 - (21+6)$

$= 1287 - 27 = $ **1260 通り**

445（1）左辺 $= {}_9\mathrm{C}_4 + {}_9\mathrm{C}_5$

$= ({}_8\mathrm{C}_3 + {}_8\mathrm{C}_4) + ({}_8\mathrm{C}_4 + {}_8\mathrm{C}_5)$

$= {}_8\mathrm{C}_3 + 2{}_8\mathrm{C}_4 + {}_8\mathrm{C}_5$

$=$ 右辺

（2）（1）より

左辺 $= {}_8\mathrm{C}_3 + 2{}_8\mathrm{C}_4 + {}_8\mathrm{C}_5$

$= ({}_7\mathrm{C}_2 + {}_7\mathrm{C}_3) + 2({}_7\mathrm{C}_3 + {}_7\mathrm{C}_4) + ({}_7\mathrm{C}_4 + {}_7\mathrm{C}_5)$

$= {}_7\mathrm{C}_2 + {}_7\mathrm{C}_3 + 2{}_7\mathrm{C}_3 + 2{}_7\mathrm{C}_4 + {}_7\mathrm{C}_4 + {}_7\mathrm{C}_5$

$= {}_7\mathrm{C}_2 + 3{}_7\mathrm{C}_3 + 3{}_7\mathrm{C}_4 + {}_7\mathrm{C}_5$

$=$ 右辺

（3）（2）より

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= {}_7\mathrm{C}_2 + 3{}_7\mathrm{C}_3 + 3{}_7\mathrm{C}_4 + {}_7\mathrm{C}_5 \\
&= ({}_6\mathrm{C}_1 + {}_6\mathrm{C}_2) + 3({}_6\mathrm{C}_2 + {}_6\mathrm{C}_3) \\
&\qquad + 3({}_6\mathrm{C}_3 + {}_6\mathrm{C}_4) + ({}_6\mathrm{C}_4 + {}_6\mathrm{C}_5) \\
&= {}_6\mathrm{C}_1 + {}_6\mathrm{C}_2 + 3{}_6\mathrm{C}_2 + 3{}_6\mathrm{C}_3 \\
&\qquad + 3{}_6\mathrm{C}_3 + 3{}_6\mathrm{C}_4 + {}_6\mathrm{C}_4 + {}_6\mathrm{C}_5 \\
&= {}_6\mathrm{C}_1 + 4{}_6\mathrm{C}_2 + 6{}_6\mathrm{C}_3 + 4{}_6\mathrm{C}_4 + {}_6\mathrm{C}_5 \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}$$

446　4 が 3 個，5 が 3 個，6 が 2 個あるので

$$\frac{8!}{3!3!2!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\times 3\cdot 2\cdot 1\times 2\cdot 1}$$
$$= \mathbf{560}\ \textbf{通り}$$

447（1）玉の総数は，$3+2+3+2=10$ 個であるから

$$\frac{10!}{3!2!3!2!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\times 2\cdot 1\times 3\cdot 2\cdot 1\times 2\cdot 1}$$
$$= \mathbf{25200}\ \textbf{通り}$$

（2）赤玉 3 個を 1 組として，この 1 組と青玉 2 個，白玉 3 個，黒玉 2 個を並べる順列の総数は

$$\frac{8!}{1!2!3!2!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 8\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\times 2\cdot 1\times 3\cdot 2\cdot 1\times 2\cdot 1}$$
$$= \mathbf{1680}\ \textbf{通り}$$

448（1）　6 人による円順列なので

$$\begin{aligned}(6-1)! &= 5! \\ &= 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = \mathbf{120}\ \textbf{通り}\end{aligned}$$

（2）　男子だけが丸く並ぶときの場合の数は，3 人による円順列なので

$(3-1)! = 2!$ 通り

この各の並び方に対して，3 カ所ある男子と男子の間に女子を順番に並べていけばよいので，その並び方は，$3!$ 通り

よって，$2!\times 3! = \mathbf{12}$ **通り**

449（1）

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= {}_5\mathrm{C}_0\,a^5 + {}_5\mathrm{C}_1\,a^4b + {}_5\mathrm{C}_2\,a^3b^2 \\
&\qquad + {}_5\mathrm{C}_3\,a^2b^3 + {}_5\mathrm{C}_4\,ab^4 + {}_5\mathrm{C}_5\,b^5 \\
&= 1\cdot a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 \\
&\qquad + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1\cdot b^5 \\
&= \boldsymbol{a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2} \\
&\qquad \boldsymbol{+10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5}
\end{aligned}$$

（2）

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \{1+(-x)\}^7 \\
&= {}_7\mathrm{C}_0\,1^7 + {}_7\mathrm{C}_1\,1^6(-x) + {}_7\mathrm{C}_2\,1^5(-x)^2 \\
&\quad + {}_7\mathrm{C}_3\,1^4(-x)^3 + {}_7\mathrm{C}_4\,1^3(-x)^4 \\
&\quad + {}_7\mathrm{C}_5\,1^2(-x)^5 + {}_7\mathrm{C}_6\,1(-x)^6 \\
&\quad + {}_7\mathrm{C}_7\,(-x)^7 \\
&= 1\cdot 1 + 7\cdot(-x) + 21x^2 + 35\cdot(-x^3) \\
&\quad + 35x^4 + 21\cdot(-x^5) + 7x^6 + 1\cdot(-x^7) \\
&= \boldsymbol{1 - 7x + 21x^2 - 35x^3} \\
&\qquad \boldsymbol{+ 35x^4 - 21x^5 + 7x^6 - x^7}
\end{aligned}$$

（3）

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= {}_6\mathrm{C}_0\,x^6 + {}_6\mathrm{C}_1\,x^5\cdot\frac{1}{x} + {}_6\mathrm{C}_2\,x^4\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2 \\
&\quad + {}_6\mathrm{C}_3\,x^3\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^3 + {}_6\mathrm{C}_4\,x^2\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^4 \\
&\quad + {}_6\mathrm{C}_5\,x\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^5 + {}_6\mathrm{C}_6\left(\frac{1}{x}\right)^6 \\
&= 1x^6 + 6x^4 + 15x^4\cdot\frac{1}{x^2} + 20x^3\cdot\frac{1}{x^3} \\
&\quad + 15x^2\cdot\frac{1}{x^4} + 6x\cdot\frac{1}{x^5} + 1\cdot\frac{1}{x^6} \\
&= \boldsymbol{x^6 + 6x^4 + 15x^2 + 20 + \frac{15}{x^2} + \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^6}}
\end{aligned}$$

450　展開式の一般項は

$$\begin{aligned}
{}_8\mathrm{C}_r\,(2x)^{8-r}(-5)^r &= {}_8\mathrm{C}_r\,2^{8-r}\,x^{8-r}\cdot(-5)^r \\
&= {}_8\mathrm{C}_r\,2^{8-r}\cdot(-5)^r\,x^{8-r}
\end{aligned}$$

$x^{8-r} = x^5$ となるのは，$8-r=5$ より，$r=3$ のときである．よって，x^5 の係数は

$$\begin{aligned}
{}_8\mathrm{C}_3\,2^{8-3}\cdot(-5)^3 &= \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 2^5\cdot(-125) \\
&= 56\cdot 32\cdot(-125) \\
&= \mathbf{-224000}
\end{aligned}$$

CHECK

451　972 を素因数分解すると，$972 = 2^2\times 3^5$

よって，約数の個数は，

$(2+1)(5+1) = 3\cdot 6 = 18$

18 個

452　$2x+4y \leqq 32$ より，$x+2y \leqq 16$ であるから，$x \leqq 16-2y$

i）$y=1$ のとき

$1 \leqq x \leqq 14$ であるから，整数解の組は，14 個

ii）$y=2$ のとき

$1 \leqq x \leqq 12$ であるから，整数解の組は，12 個

iii）$y=3$ のとき

$1 \leqq x \leqq 10$ であるから，整数解の組は，10 個

iv）$y=4$ のとき

$1 \leqq x \leqq 8$ であるから，整数解の組は，8 個

v）$y=5$ のとき

$1 \leqq x \leqq 6$ であるから，整数解の組は，6 個

vi）$y=6$ のとき

$1 \leqq x \leqq 4$ であるから，整数解の組は，4 個

vii）$y=7$ のとき

$1 \leqq x \leqq 2$ であるから，整数解の組は，2 個

よって，和の法則より

$14+12+10+8+6+4+2 = \mathbf{56}$ **個**

453（1）

$$\begin{aligned}\text{与式} &= \frac{8\cdot 7\cdot 6!}{8\cdot 7} \\ &= 6! = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = \mathbf{720}\end{aligned}$$

（2）与式 $= \dfrac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \mathbf{126}$

（3）与式 $= 8\cdot 7\cdot 6 = \mathbf{336}$

454　1 の位には 2，4，6 のいずれかの数字を並べればよいので，3 通り．この各の並べ方の対して，残りの 5 つの位の数字の並べ方は，5 個の数字の順列であるから

$3\times 5! = 3\cdot 120 = \mathbf{360}$ **個**

455　ハートが 2 枚になる場合と 3 枚になる場合がある．また，ハート以外のマークの枚数は，$52-13=39$ 枚である．

i）ハートが 2 枚の場合

2 枚のハートが置かれる場所は

- 1 枚目と 2 枚目
- 1 枚目と 3 枚目
- 2 枚目と 3 枚目

の 3 通りがあり，この各に対して，ハートの並べ方と，ハート以外の並べ方は

$$\begin{aligned}{}_{13}\mathrm{P}_2 \times {}_{39}\mathrm{P}_1 &= (13\cdot 12)\times 39\\ &= 6084\end{aligned}$$

よって，$3\times 6084 = 18252$

ii）ハートが 3 枚の場合

13 枚のハートから 3 枚を選び並べればよいので

$$\begin{aligned}{}_{13}\mathrm{P}_3 &= 13\cdot 12\cdot 11\\ &= 1716\end{aligned}$$

i)，ii) は同時には起こらないので

$18252+1716=$ **19968 通り**

456　1 の位には 1，3 のいずれかの数字を並べればよいので，2 通り．この各の並べ方の対して，残りの 3 つの位の数字は，3 個の数字の重複順列であるから

$2\times 3^3 =$ **54 個**

457　例えば目の出方が，$1,1,2,2,2,1,2$ のような場合が何通りあるかを考えればよい．

7 回の中から，1 の目が出るのが何回目かを 3 個選べばよいので（例の場合だと，1 回目，2 回目，6 回目）

${}_7\mathrm{C}_3 = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} =$ **35 通り**

※ または，2 の目が出るのが何回目かを 4 個選んでもよい．

〔別解〕

目の出方を表す $1,1,2,2,2,1,2$ のような数の並びは，3 個の 1 と 4 個の 2 を並べたものであるから，同じものを含む順列の考え方で

$\dfrac{7\,!}{3\,!\,4\,!} =$ **35 通り**

458　奇数の札は，1，3，5，7 の 4 枚であり，この中から 3 枚を選べばよいので

${}_4\mathrm{C}_3 = {}_4\mathrm{C}_1 =$ **4 通り**

459　2 班から選ぶ人数を 3 人，4 人，5 人の場合に分けて考える．

i）3 人の場合

2 班の 7 人の中から 3 人，1 班の 6 人の中から 2 人を選べばよいので

$$\begin{aligned}{}_7\mathrm{C}_3 \times {}_6\mathrm{C}_2 &= \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}\times\frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}\\ &= 35\cdot 15 = 525\end{aligned}$$

ii）4 人の場合

2 班の 7 人の中から 4 人，1 班の 6 人の中から 1 人を選べばよいので

$$\begin{aligned}{}_7\mathrm{C}_4 \times {}_6\mathrm{C}_1 &= {}_7\mathrm{C}_3 \times 6\\ &= 35\cdot 6 = 210\end{aligned}$$

iii）5 人の場合

2 班の 7 人の中から 5 人を選べばよいので

$$\begin{aligned}{}_7\mathrm{C}_5 &= {}_7\mathrm{C}_2\\ &= \frac{7\cdot 6}{2\cdot 1} = 21\end{aligned}$$

i)，ii)，iii) は同時には起こらないので

$525+210+21=$ **756 通り**

460　黒玉 2 個を 1 組とし，この 1 組と他の 8 個の玉の並び方は，同じものを含む順列の考え方で

$\dfrac{9\,!}{3\,!\,2\,!\,3\,!1\,!} =$ **5040 通り**

461　男子 2 人を 1 組とし，この 1 組と女子 3 人の円順列を考えると

$(4-1)\,! = 3\,! = 6$

この各の並び方に対して，男子 2 人の並び方は，$2\,! = 2$ 通りずつあるので

$6\times 2 =$ **12 通り**

462　与式 $= {}_5\mathrm{C}_0\,(2x)^5 + {}_5\mathrm{C}_1\,(2x)^4\cdot(-1) + {}_5\mathrm{C}_2\,(2x)^3\cdot(-1)^2$

$$\begin{aligned}&\quad + {}_5\mathrm{C}_3\,(2x)^2\cdot(-1)^3 + {}_5\mathrm{C}_4\,(2x)\cdot(-1)^4 + {}_5\mathrm{C}_5\,(-1)^5\\ &= 1\cdot 32x^5 + 5\cdot 16x^4\cdot(-1) + 10\cdot 8x^3\cdot 1\\ &\quad + 10\cdot 4x^2\cdot(-1) + 5\cdot 2x\cdot 1 + 1\cdot(-1)\\ &= \boldsymbol{32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x - 1}\end{aligned}$$

463　展開式の一般項は

$$\begin{aligned}{}_8\mathrm{C}_r\,(3x)^{8-r}(-2)^r &= {}_8\mathrm{C}_r\,3^{8-r}\,x^{8-r}\cdot(-2)^r\\ &= {}_8\mathrm{C}_r\,3^{8-r}\cdot(-2)^r\,x^{8-r}\end{aligned}$$

$x^{8-r} = x^3$ となるのは，$8-r=3$ より，$r=5$ のときである．よって，x^5 の係数は

$$\begin{aligned}{}_8\mathrm{C}_5\,3^{8-5}\cdot(-2)^5 &= {}_8\mathrm{C}_3\cdot 3^3\cdot(-32)\\ &= \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 27\cdot(-32)\\ &= 56\cdot 27\cdot(-32) = \boldsymbol{-48384}\end{aligned}$$

STEP UP

464（1）右辺 $= n\cdot\dfrac{(n-1)\,!}{\{(n-1)-(r-1)\}\,!}$

$$\begin{aligned}&= \frac{n(n-1)\,!}{(n-r)\,!}\\ &= \frac{n\,!}{(n-r)\,!} = {}_n\mathrm{P}_r = \text{左辺}\end{aligned}$$

（2）右辺 $= \dfrac{(n-1)\,!}{(n-1-r)\,!} + r\cdot\dfrac{(n-1)\,!}{\{(n-1)-(r-1)\}\,!}$

$$\begin{aligned}&= \frac{(n-1)\,!}{(n-r-1)\,!} + \frac{r(n-1)\,!}{(n-r)\,!}\\ &= \frac{(n-r)(n-1)\,!}{(n-r)(n-r-1)\,!} + \frac{r(n-1)\,!}{(n-r)\,!}\\ &= \frac{(n-r)(n-1)\,!}{(n-r)\,!} + \frac{r(n-1)\,!}{(n-r)\,!}\\ &= \frac{(n-r)(n-1)\,! + r(n-1)\,!}{(n-r)\,!}\\ &= \frac{(n-1)\,!\{(n-r)+r\}}{(n-r)\,!}\\ &= \frac{(n-1)\,!\cdot n}{(n-r)\,!}\\ &= \frac{n\,!}{(n-r)\,!} = {}_n\mathrm{P}_r = \text{左辺}\end{aligned}$$

（3）右辺 $= \dfrac{n}{n-r} \cdot \dfrac{(n-1)\,!}{r\,!\,(n-1-r)\,!}$

$= \dfrac{n(n-1)\,!}{r\,!\,(n-r)(n-r-1)\,!}$

$= \dfrac{n\,!}{r\,!\,(n-r)\,!} = {}_n\mathrm{C}_r =$ 左辺

（4）右辺 $= \dfrac{n-r+1}{r} \cdot \dfrac{n\,!}{(r-1)\,!\,\{n-(r-1)\}\,!}$

$= \dfrac{(n-r+1)n\,!}{r(r-1)\,!\,(n-r+1)\,!}$

$= \dfrac{n\,!}{r\,!\,(n-r)\,!} = {}_n\mathrm{C}_r =$ 左辺

465　2 人を A，B とし，A が勝つことを a，B が勝つことを b で表す．

（1）　7 回目に A が勝って決着がつくのは

$b\ a\ b\ a\ b\ a\ a$

という場合のみで，7 回目に B が勝って決着がつくのは

$a\ b\ a\ b\ a\ b\ b$

という場合のみであるから，**2 通り**

（2）　7 回目に A が勝って決着がつくのは

○○○ $b\ a\ a\ a$

という場合で，○○○の部分では決着がつかないので

$a\ a\ b$

$a\ b\ a$

$b\ a\ a$

$b\ a\ b$

$b\ b\ a$

の 5 通りがある．また，7 回目に B が勝って決着がつく場合も同じ数だけあるので

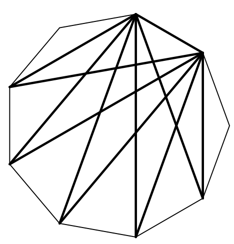
$5 \times 2 =$ **10 通り**

466（1）　9 個の頂点の中から 3 個を選べば 1 つの三角形ができるので

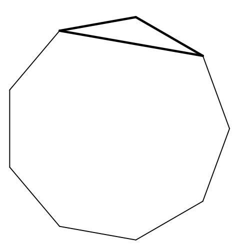
${}_9\mathrm{C}_3 = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} =$ **84 通り**

（2）　図のように，正九角形と 1 辺を共有する三角形は，1 個の辺に対して 5 通りずつあるので

$5 \times 9 =$ **45 通り**



（3）　図のように，正九角形と 2 辺を共有する三角形は，1 個の頂点に対して 1 通りずつあるので全部で 9 通り．



以上より，正九角形と辺を共有しない三角形の個数は

$84 - (45 + 9) =$ **30 通り**

467　7 個の数字のうち，使わない 1 個の数字によって場合分けをする．

i) 1 を使わない場合

1，2，2，2，3，3 の 6 個の数字の中に，1 が 1 個，2 が 3 個，3 が 2 個あるので，$\dfrac{6\,!}{3\,!\,2\,!} = 60$ 通り

ii) 2 を使わない場合

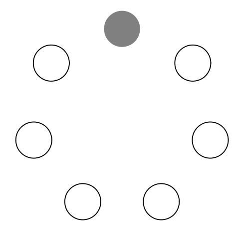
1，1，2，2，3，3 の 6 個の数字の中に，1 が 2 個，2 が 2 個，3 が 2 個あるので，$\dfrac{6\,!}{2\,!\,2\,!\,2\,!} = 90$ 通り

iii) 3 を使わない場合

1，1，2，2，2，3 の 6 個の数字の中に，1 が 2 個，2 が 3 個，3 が 1 個あるので，$\dfrac{6\,!}{2\,!\,3\,!} = 60$ 通り

以上より，$60 + 90 + 60 =$ **210 通り**

468（1）　図のように，1 個の赤玉を固定して考える．

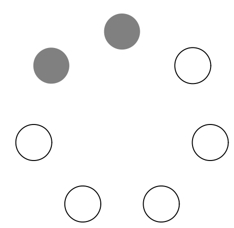


残りの 6 個の置き場所の中から，青玉 2 個を置く場所を決めればよいから

${}_6\mathrm{C}_2 = \dfrac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} =$ **15 通り**

※ 白玉 4 個を置く場所を考え，${}_6\mathrm{C}_4$ としても同じ結果が得られる．

（2）　青玉 2 個が**隣り合う**場合を考える．



図のように，青玉 2 個を隣り合わせて置き，残りの 5 個の置き場所から，赤玉 1 個を置く場所（または，白玉 4 個を置く場所）を決めればよいから，青玉 2 個が隣り合う並べ方は

${}_5\mathrm{C}_1 = 5$

よって，青玉 2 個が隣り合わない並べ方は

$15 - 5 =$ **10 通り**

469（1）　千の位が 1，すなわち，1 ○○○となる自然数は，○○○に並ぶ数字を考えて

${}_5\mathrm{P}_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ 個

千の位が 2，3 の場合も同様なので，千の位が 3 以下の数は，$60 \times 3 = 180$ 個あるから

181 番目 → 4123

182 番目 → 4125

よって，4125 は，**182 番目**

（2）　千の位が 1 である数は 60 個，千の位が 2 以下である数は 120 個なので，100 番目の数の千の位は 2 である．

21 ○○となる数は，${}_4\mathrm{P}_2 = 12$ 個あるから，ここまでの数の総数は，$60 + 12 = 72$

23 ○○となる数は，${}_4\mathrm{P}_2 = 12$ 個あるから，ここまでの数の総数は，$72 + 12 = 84$

24 ○○となる数は，${}_4\mathrm{P}_2 = 12$ 個あるから，ここまでの数の総数は，$84 + 12 = 96$

97 番目 → 2513

98 番目 → 2514

99 番目 → 2516

100 番目 → 2531

よって，100 番目の数は，**2531**

470 $(1+x)^n$ を，二項定理を用いて展開すると

$$(1+x)^n = {}_n\mathrm{C}_0 1^n + {}_n\mathrm{C}_1 1^{n-1}x + {}_n\mathrm{C}_2 1^{n-2}x^2 + \cdots$$
$$\cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} 1^1 x^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n x^n$$
$$= {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 x + {}_n\mathrm{C}_2 x^2 + + {}_n\mathrm{C}_3 x^3 \cdots$$
$$\cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} x^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n x^n$$

すなわち

$$ {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 x + {}_n\mathrm{C}_2 x^2 + {}_n\mathrm{C}_3 x^3 + \cdots$$
$$\cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} x^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n x^n = (1+x)^n \cdots ①$$

（1） ① において，$x = 1$ とすると

$$ {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 \cdot 1 + {}_n\mathrm{C}_2 \cdot 1^2 + {}_n\mathrm{C}_3 \cdot 1^3 + \cdots$$
$$\cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} \cdot 1^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n \cdot 1^n = (1+1)^n$$

すなわち

$$ {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n = \boldsymbol{2^n}$$

（2） ① において，$x = -1$ とすると

$$ {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 \cdot (-1) + {}_n\mathrm{C}_2 \cdot (-1)^2 + {}_n\mathrm{C}_3 \cdot (-1)^3 + \cdots$$
$$\cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} \cdot (-1)^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n \cdot (-1)^n = \{1 + (-1)\}^n$$

すなわち

$$ {}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 - {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots + (-1)^n {}_n\mathrm{C}_n = \mathbf{0}$$

（3） n を偶数として，（1），（2）の結果の辺々を加えると

$$2{}_n\mathrm{C}_0 + 2{}_n\mathrm{C}_2 + 2{}_n\mathrm{C}_4 + \cdots + 2{}_n\mathrm{C}_{n-2} + 2{}_n\mathrm{C}_n = 2^n$$
$$2({}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_4 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-2} + {}_n\mathrm{C}_n) = 2^n$$

これより

$$ {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_4 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-2} + {}_n\mathrm{C}_n = \frac{2^n}{2}$$

よって，${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_4 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-2} + {}_n\mathrm{C}_n = \boldsymbol{2^{n-1}}$

471 （1） 展開式の一般項は

$$ {}_{11}\mathrm{C}_r\,(x^2)^{11-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r = {}_{11}\mathrm{C}_r\,(-1)^r x^{22-2r}\,x^{-r}$$
$$= {}_{11}\mathrm{C}_r\,(-1)^r x^{22-3r}$$

$x^{22-3r} = x$ となるのは，$22 - 3r = 1$ より，$r = 7$ のときである．よって，x の係数は

$$ {}_{11}\mathrm{C}_7 \cdot (-1)^7 = {}_{11}\mathrm{C}_4 \cdot (-1)$$
$$= \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot (-1) = \mathbf{-330}$$

（2） 展開式の一般項は

$$ {}_{10}\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{x}\right)^{10-r}(2x)^r = {}_{10}\mathrm{C}_r\,2^r(x^{-1})^{10-r}\,x^r$$
$$= {}_{10}\mathrm{C}_r\,2^r x^{-10+r} x^r$$
$$= {}_{10}\mathrm{C}_r\,2^r x^{2r-10}$$

$x^{2r-10} = x^2$ となるのは，$2r - 10 = 2$ より，$r = 6$ のときである．よって，x の係数は

$$ {}_{10}\mathrm{C}_6 \cdot 2^6 = {}_{10}\mathrm{C}_4 \cdot 64$$
$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 64 = \mathbf{13440}$$

（3） 展開式の一般項は

$$ {}_8\mathrm{C}_r\,x^{8-r}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^r = {}_8\mathrm{C}_r\,(-1)^r x^{8-r}\,(x^{-2})^r$$
$$= {}_8\mathrm{C}_r\,(-1)^r x^{8-r} x^{-2r}$$
$$= {}_8\mathrm{C}_r\,(-1)^r x^{8-3r}$$

$x^{8-3r} = x^{-1}$ となるのは，$8 - 3r = -1$ より，$r = 3$ のときである．よって，x の係数は

$$ {}_8\mathrm{C}_3\,(-1)^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot (-1) = \mathbf{-56}$$

472 （1） 鉛筆を○で表し，これを A，B，C，D の 4 人に分けるとする．図のように，10 個の○と仕切り 3 個を並べることを考えればよい．この場合は，A 2 個，B 3 個，C 0 個，D 5 個であることを表している．

○○｜○○○｜｜○○○○○

このような並べ方の総数は，○と｜の計 13 個を並べる場所を用意し，これらの中から｜を置く場所 3 個（または，○を置く場所 10 個）の選び方の総数となるから

$$ {}_{13}\mathrm{C}_3 = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \mathbf{286}\ \textbf{通り}$$

〔別解〕

同じものを含む順列の考え方を利用すれば，10 個の○と 3 個の｜を 1 列に並べるときの順列の数になるので

$$\frac{13!}{10!3!} = \mathbf{286}\ \textbf{通り}$$

（2） 下の図のように，10 個の○を並べる．

○ ↑ ○ ↑ ○ ↑ ○ ↑ ○ ↑ ○ ↑ ○ ↑ ○ ↑ ○ ↑ ○

矢印のある 9 個の位置の中から仕切りを置く場所を 3 個選べばよいので

$$ {}_9\mathrm{C}_3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \mathbf{84}\ \textbf{通り}$$

473 （1） まず，A，B のどちらかが空になってもよいとした場合を考える．ボールはすべて区別できるので，1 個目のボールを入れる箱の選び方は A，B 何れかであるから 2 通りある．2 個目のボールも同様に 2 通りの選び方があるので，すべてのボールの箱への入れ方の総数は，2^8 通りである．

この中には，A，B それぞれが空になってしまう 2 通りの場合が含まれているので，求める場合の数は

$$2^8 - 2 = 256 - 2 = \mathbf{254}\ \textbf{通り}$$

（2） まず，A，B，C の何れかが空になってもよいとした場合を考える．ボールはすべて区別できるので，1 個目のボールを入れる箱の選び方は A，B，C 何れかであるから 3 通りある．2 個目のボールも同様に 3 通りの選び方があるので，すべてのボールの箱への入れ方の総数は，3^8 通りである．

この中には，A，B，C のうちどれか 1 個が空になる場合と，3 個のうち，2 個が空になる場合（すべてのボールが 1 個の箱に入る場合）が含まれている．

A，B，C のうちどれか 1 個が空になる場合は，（1）より，$254 \times 3 = 762$ 通り．

また，すべてのボールが 1 個の箱に入る場合は 3 通りあるから，求める場合の数は

$$3^8 - (762 + 3) = 6561 - 765 = \mathbf{5796}\ \textbf{通り}$$

474　(1)　下の図のように，10 個の○を並べる．

$$\bigcirc_{\uparrow}\bigcirc_{\uparrow}\bigcirc_{\uparrow}\bigcirc_{\uparrow}\bigcirc_{\uparrow}\bigcirc_{\uparrow}\bigcirc_{\uparrow}\bigcirc_{\uparrow}\bigcirc_{\uparrow}\bigcirc$$

矢印のある 9 個の位置の中から 2 個選び，そこに仕切り置く．例えば，下の図のように仕切りを入れた場合は，$10 = 2 + 5 + 3$ を表す．

○○｜○○○○○｜○○○

よって，3 個の数を用いる場合は，${}_9\mathrm{C}_2 = \dfrac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = $ **36 通り**

(2)　(1) と同様に考えて

8 個の数を用いる場合は，${}_9\mathrm{C}_7 = {}_9\mathrm{C}_2 = \dfrac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = 36$ 通り

9 個の数を用いる場合は，${}_9\mathrm{C}_8 = {}_9\mathrm{C}_1 = 9$ 通り

10 個の数を用いる場合は，${}_9\mathrm{C}_9 = 1$ 通り

よって，8 個以上の数を用いる場合は

$36 + 9 + 1 = $ **46 通り**

(3)　求める場合の数は

$${}_9\mathrm{C}_1 + {}_9\mathrm{C}_2 + {}_9\mathrm{C}_3 + \cdots + {}_9\mathrm{C}_8 + {}_9\mathrm{C}_9$$

となるが，**470** より

$${}_9\mathrm{C}_0 + {}_9\mathrm{C}_1 + {}_9\mathrm{C}_2 + {}_9\mathrm{C}_3 + \cdots + {}_9\mathrm{C}_8 + {}_9\mathrm{C}_9 = 2^9$$

であるから

$$\begin{aligned}{}_9\mathrm{C}_1 + {}_9\mathrm{C}_2 + {}_9\mathrm{C}_3 + \cdots + {}_9\mathrm{C}_8 + {}_9\mathrm{C}_9 &= 2^9 - {}_9\mathrm{C}_0 \\ &= 512 - 1 \\ &= \textbf{511 通り}\end{aligned}$$

■