練習問題 2-A

1. （1）　指数を用いた形に書き換えると

$4^2 = x$

よって，$\boldsymbol{x = 16}$

〔別解〕

$\log_4 x = 2\log_4 4$

$= \log_4 4^2 = \log_4 16$

よって，$\boldsymbol{x = 16}$

（2）　指数を用いた形に書き換えると

$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = x$

$x = (3^{-1})^{-2} = 3^2$

よって，$\boldsymbol{x = 9}$

〔別解〕

$\log_{\frac{1}{3}} x = -2\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}$

$= \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

$= \log_{\frac{1}{3}} (3^{-1})^{-2}$

$= \log_{\frac{1}{3}} 3^2 = \log_{\frac{1}{3}} 9$

よって，$\boldsymbol{x = 9}$

（3）　指数を用いた形に書き換えると

$10^{\frac{3}{2}} = x$

$x = \sqrt{10^3}$

よって，$\boldsymbol{x = 10\sqrt{10}}$

〔別解〕

$\log_{10} x = \frac{3}{2}\log_{10} 10$

$= \log_{10} 10^{\frac{3}{2}}$

$= \log_{10} \sqrt{10^3} = \log_{10} 10\sqrt{10}$

よって，$\boldsymbol{x = 10\sqrt{10}}$

（4）　指数を用いた形に書き換えると

$x^3 = 8$

$x^3 = 2^3$

よって，$\boldsymbol{x = 2}$

〔別解〕

$\log_x 8 = 3\log_x x$

$\log_x 2^3 = \log_x x^3$

よって，$\boldsymbol{x = 2}$

（5）　指数を用いた形に書き換えると

$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$

$x^{\frac{1}{2}} = 10^{\frac{1}{2}}$

よって，$\boldsymbol{x = 10}$

〔別解〕

$\log_x \sqrt{10} = \frac{1}{2}\log_x x$

$\log_x 10^{\frac{1}{2}} = \log_x x^{\frac{1}{2}}$

よって，$\boldsymbol{x = 10}$

（6）　指数を用いた形に書き換えると

$(\sqrt{6})^x = 216$

$(6^{\frac{1}{2}})^x = 6^3$

$6^{\frac{1}{2}x} = 6^3$

よって，$\frac{1}{2}x = 3$，すなわち，$\boldsymbol{x = 6}$

〔別解〕

$\log_{\sqrt{6}} 216 = x\log_{\sqrt{6}} \sqrt{6}$

$\log_{\sqrt{6}} 6^3 = \log_{\sqrt{6}} (\sqrt{6})^x$

$= \log_{\sqrt{6}} (6^{\frac{1}{2}})^x$

$= \log_{\sqrt{6}} 6^{\frac{1}{2}x}$

よって，$3 = \frac{1}{2}x$，すなわち，$\boldsymbol{x = 6}$

2. （1）　与式 $= \log_3 \frac{54}{18}$

$= \log_3 3 = \mathbf{1}$

（2）　与式 $= \log_{10} \frac{1}{15} + \log_{10} \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \log_{10} \frac{1}{15} + \log_{10} \frac{3}{2}$

$= \log_{10} \frac{1}{15} \cdot \frac{3}{2}$

$= \log_{10} \frac{1}{10}$

$= \log_{10} 10^{-1}$

$= -\log_{10} 10 = \mathbf{-1}$

（3）　与式 $= \log_3 8 \cdot \dfrac{\log_3 9}{\log_3 2} \cdot \dfrac{\log_3 2}{\log_3 4}$

$$= \log_3 2^3 \cdot \frac{\log_3 3^2}{\log_3 2} \cdot \frac{\log_3 2}{\log_3 2^2}$$

$$= 3\log_3 2 \cdot \frac{2\log_3 3}{\log_3 2} \cdot \frac{\log_3 2}{2\log_3 2}$$

$$= \mathbf{3}$$

3.　$\log_4 6 = \dfrac{\log_2 6}{\log_2 4}$

$$= \frac{\log_2 2 \cdot 3}{\log_2 2^2}$$

$$= \frac{\log_2 2 + \log_2 3}{2\log_2 2}$$

$$= \frac{1+m}{2 \cdot 1} = \boldsymbol{\frac{1+m}{2}}$$

$\log_3 2 = \dfrac{\log_2 2}{\log_2 3}$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{m}}$$

4.（1）

$$\begin{array}{ccc}
2\log_{0.5} 3 & 3\log_{0.5} 2 & \log_{0.5} \frac{41}{5} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\log_{0.5} 3^2 & \log_{0.5} 2^3 & \log_{0.5} 8.2 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\log_{0.5} 9 & \log_{0.5} 8 & \log_{0.5} 8.2
\end{array}$$

$y = \log_{0.5} x$ は，単調に減少するので

$\log_{0.5} 8 > \log_{0.5} 8.2 > \log_{0.5} 9$

よって

$\mathbf{3\log_{0.5} 2}$，$\boldsymbol{\log_{0.5} \frac{41}{5}}$，$\mathbf{2\log_{0.5} 3}$

（2）

$$\begin{array}{cccc}
\log_2 7 & \log_2 \sqrt{45} & 3 & \frac{1}{2}\log_2 50 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\log_2 \sqrt{49} & \log_2 \sqrt{45} & \log_2 2^3 & \log_2 50^{\frac{1}{2}} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\log_2 \sqrt{49} & \log_2 \sqrt{45} & \log_2 \sqrt{64} & \log_2 \sqrt{50}
\end{array}$$

$y = \log_2 x$ は，単調に増加するので

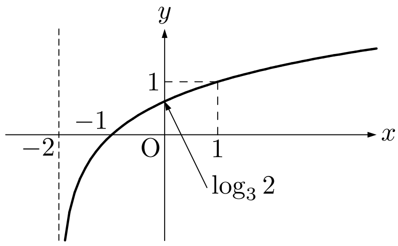
$\log_2 \sqrt{64} > \log_2 \sqrt{50} > \log_2 \sqrt{49} > \log_2 \sqrt{45}$

よって

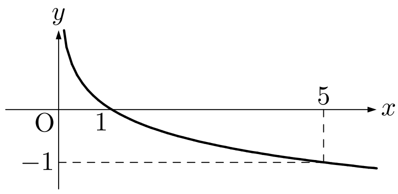
3，$\boldsymbol{\frac{1}{2}\log_2 50}$，$\boldsymbol{\log_2 7}$，$\boldsymbol{\log_2 \sqrt{45}}$

5.（1）　この関数のグラフは，$y = \log_3 x$ のグラフを，x 軸方向に -2 平行移動したものである．

また，$x = 0$ のとき，$y = \log_3(0+2) = \log_3 2$



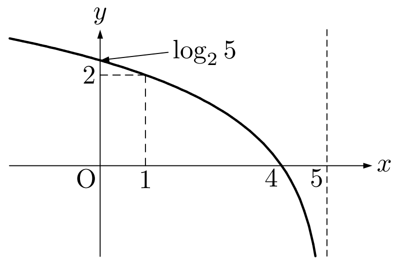
（2）　この関数のグラフは，$y = \log_5 x$ のグラフを，x 軸に関して対称移動したものである．



（3）　$y = \log_2\{-(x-5)\}$

この関数のグラフは，$y = \log_2(-x)$ のグラフを，x 軸方向に 5 平行移動したものである．

また，$x = 0$ のとき，$y = \log_2(5-0) = \log_2 5$



6.　真数条件より，$3x+3>0$，$x^2-6x-7>0$

$3x+3>0$ を解くと

$3x > -3$

$x > -1 \cdots$①

$x^2-6x-7>0$ を解くと

$(x+1)(x-7)>0$

$x<-1$，$7<x \cdots$②

①，②より，$x>7 \cdots$③

与式より

$3x+3 = x^2-6x-7$

$x^2-9x-10=0$

$(x+1)(x-10)=0$

よって，$x=-1$，10

③より，$\boldsymbol{x = 10}$

7.（1）　真数条件より，$-2x+1>0$

$-2x > -1$

$x < \dfrac{1}{2} \cdots$①

$\log_3(-2x+1) > 1\log_3 3$

$\log_3(-2x+1) > \log_3 3$

底が 1 より大きいので

$-2x+1 > 3$

$-2x > 2$

$x < -1$

これと①より，$\boldsymbol{x < -1}$

（2） 真数条件より，$6-x>0$

$x < 6 \cdots$①

$\log_4(6-x) < \frac{1}{2}\log_4 4$

$\log_4(6-x) < \log_4 4^{\frac{1}{2}}$

$\log_4(6-x) < \log_4 \sqrt{4}$

$\log_4(6-x) < \log_4 2$

底が 1 より大きいので

$6-x < 2$

$x > 4$

これと①より，$\boldsymbol{4 < x < 6}$

練習問題 2-B

1. （1） 与式 $= 3(\log_{10}3 - \log_{10}2) + \log_{10}2^3\cdot 3$

$- 2(\log_{10}9 - \log_{10}10)$

$= 3\log_{10}3 - 3\log_{10}2$

$+ (3\log_{10}2 + \log_{10}3)$

$- 2(\log_{10}3^2 - 1)$

$= 3\log_{10}3 - 3\log_{10}2 + 3\log_{10}2$

$+ \log_{10}3 - 4\log_{10}3 + 2$

$= \mathbf{2}$

（2） 与式 $= \log_3 5\cdot\dfrac{\log_3 9}{\log_3 2}\cdot\dfrac{\log_3 4}{\log_3 25}$

$= \log_3 5\cdot\dfrac{\log_3 3^2}{\log_3 2}\cdot\dfrac{\log_3 2^2}{\log_3 5^2}$

$= \log_3 5\cdot\dfrac{2\log_3 3}{\log_3 2}\cdot\dfrac{2\log_3 2}{2\log_3 5}$

$= \log_3 5\cdot\dfrac{2}{\log_3 2}\cdot\dfrac{2\log_3 2}{2\log_3 5} = \mathbf{2}$

（3） 与式 $= \left(\log_2 9 + \dfrac{\log_2 3}{\log_2 4}\right)\cdot\dfrac{\log_2 4}{\log_2 27}$

$= \left(\log_2 3^2 + \dfrac{\log_2 3}{\log_2 2^2}\right)\cdot\dfrac{\log_2 2^2}{\log_2 3^3}$

$= \left(2\log_2 3 + \dfrac{\log_2 3}{2}\right)\cdot\dfrac{2}{3\log_2 3}$

$= \dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{3} = \boldsymbol{\dfrac{5}{3}}$

2. （1） 真数条件より，$x^2-6x+8>0,\ x-2>0$

$x^2-6x+8>0$ を解くと

$(x-2)(x-4)>0$

よって，$x<2,\ 4<x\cdots$①

$x-2>0$ を解くと，$x>2\cdots$②

①，②より，$x>4\cdots$③

与式より

$\log_2\dfrac{x^2-6x+8}{x-2} = 2\log_2 2$

$\log_2\dfrac{(x-2)(x-4)}{x-2} = \log_2 2^2$

$\log_2(x-4) = \log_2 4$

よって，$x-4=4$

$x=8$

これは③を満たすので，$\boldsymbol{x=8}$

（2） 真数条件より，$x^2-5x+8>0,\ x-1>0$

$x^2-5x+4>0$ を解くと

$(x-1)(x-4)>0$

よって，$x<1,\ 4<x\cdots$①

$x-1>0$ を解くと，$x>1\cdots$②

①，②より，$x>4\cdots$③

与式より

$\log_5(x^2-5x+4) - \log_5(x-1) = 1$

$\log_5\dfrac{x^2-5x+4}{x-1} = \log_5 5$

$\log_5\dfrac{(x-1)(x-4)}{x-1} = \log_5 5$

$\log_5(x-4) = \log_5 5$

よって，$x-4=5$

$x=9$

これは③を満たすので，$\boldsymbol{x=9}$

（3） 真数条件より，$x>0\cdots$①

与式より

$(\log_2 x+1)(\log_2 x-2)=0$

よって，$\log_2 x = -1,\ 2$

$\log_2 x = -1$ のとき

$\log_2 x = \log_2 2^{-1}$ より，$x = \dfrac{1}{2}$

$\log_2 x = 2$ のとき

$\log_2 x = \log_2 2^2$ より，$x=4$

いずれも①を満たすので，$\boldsymbol{x = \frac{1}{2},\ 4}$

3. $X = \log_a 4 - \log_a 3$

$= \log_a 2^2 - \log_a 3$

$= 2\log_a 2 - \log_a 3 \cdots$ ①

$Y = \log_a 8 - \log_a 3$

$= \log_a 2^3 - \log_a 3$

$= 3\log_a 2 - \log_a 3 \cdots$ ②

①，②から，$\log_a 2$ を消去する．

$$\begin{array}{lcll} ①\times 3 & & 3X & = 6\log_a 2 - 3\log_a 3 \\ ②\times 2 & -) & 2Y & = 6\log_a 2 - 2\log_a 3 \\ \hline & & 3X - 2Y & = -\log_a 3 \end{array}$$

よって，$\boldsymbol{\log_a 3 = -3X + 2Y}$

4. $5^x = 2^y = \sqrt{10^z}$ の各辺の常用対数をとると

$\log_{10} 5^x = \log_{10} 2^y = \log_{10}\sqrt{10^z}$

$x\log_{10} 5 = y\log_{10} 2 = \log_{10} 10^{\frac{z}{2}}$

$x\log_{10} 5 = y\log_{10} 2 = \dfrac{z}{2}$

これより，$x = \dfrac{z}{2\log_{10} 5}$，$y = \dfrac{z}{2\log_{10} 2}$

これらを証明すべき等式の左辺に代入すると

$$\text{左辺} = \frac{1}{\frac{z}{2\log_{10} 5}} + \frac{1}{\frac{z}{2\log_{10} 2}}$$
$$= \frac{2\log_{10} 5}{z} + \frac{2\log_{10} 2}{z}$$
$$= \frac{2\log_{10} 5 + 2\log_{10} 2}{z}$$
$$= \frac{2(\log_{10} 5 + \log_{10} 2)}{z}$$
$$= \frac{2\log_{10} 5\cdot 2}{z}$$
$$= \frac{2\log_{10} 10}{z}$$
$$= \frac{2\cdot 1}{z} = \frac{2}{z} = \text{右辺}$$

5. （1） 真数条件より，$x > 0 \cdots$①，$\log_3 x > 0$

$\log_3 x > 0$ より，$x > 1 \cdots$②

①，②より，$x > 1 \cdots$③

与式より

$\log_2(\log_3 x) < \log_2 2$

底の 2 は 1 より大きいので

$\log_3 x < 2$

$\log_3 x < 2\log_3 3$

$\log_3 x < \log_3 3^2$

底の 3 は 1 より大きいので

$x < 9$

これと，③より，$\boldsymbol{1 < x < 9}$

（2） 真数条件より，$x + 1 > 0$，$3 - x > 0$

$x + 1 > 0$ より，$x > -1 \cdots$①

$3 - x > 0$ より，$x < 3 \cdots$②

①，②より，$-1 < x < 3 \cdots$③

与式より，底の 2 は 1 より大きいので

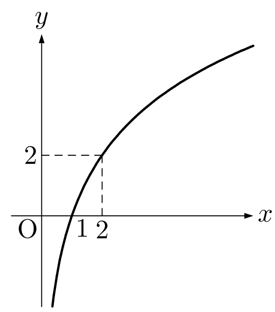
$x + 1 < 3 - x$

$2x < 2$

$x < 1$

これと，③より，$\boldsymbol{-1 < x < 1}$

6. （1） この関数のグラフは，$y = \log_2 x$ のグラフを，y 軸方向に 2 倍に拡大したものである．



（2） 真数条件より，$x^2 > 0$，すなわち，$x \neq 0$

また，真数が正であることから

$y = \log_2 x^2 = 2\log_2|x|$

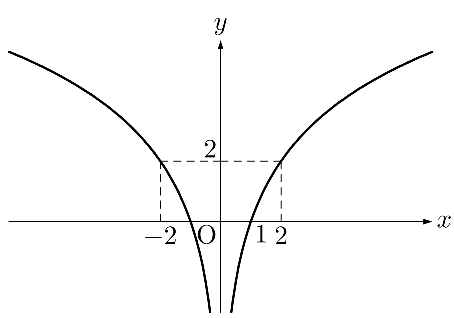
i）$x > 0$ のとき

$y = \log_2 x$ であるから，（1）のグラフとなる．

ii）$x < 0$ のとき

$y = \log_2(-x)$ であるから，（1）のグラフを，y 軸に関して対称移動したグラフとなる．

以上より



7. $\log_b a = \dfrac{\log_a a}{\log_a b} = \dfrac{1}{\log_a b}$ を，与えられた条件に代入すると

$$\log_a b + \frac{1}{\log_a b} = \frac{10}{3}$$

両辺に，$\log_a b$ をかけると

$$(\log_a b)^2 + 1 = \frac{10}{3}\log_a b$$
$$3(\log_a b)^2 - 10\log_a b + 3 = 0$$
$$(3\log_a b - 1)(\log_a b - 3) = 0$$

よって，$\log_a b = \frac{1}{3}$，3

ここで，$1 < b < a$ より，$\log_a 1 < \log_a b < \log_a a$，すなわち，$0 < \log_a b < 1$ であるから，$\log_a b = \frac{1}{3}$

以上より

$$\begin{aligned}\log_a b - \log_b a &= \log_a b - \frac{1}{\log_a b}\\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{\frac{1}{3}}\\ &= \frac{1}{3} - 3 = \boldsymbol{-\frac{8}{3}}\end{aligned}$$