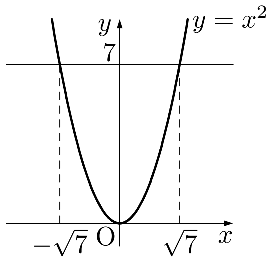
4章　指数関数と対数関数

§１　指数関数　(p.37〜p.42)

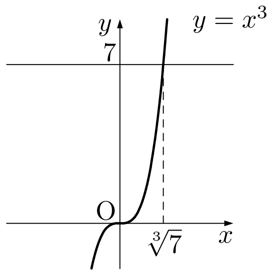
BASIC

194

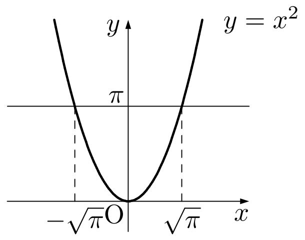
（１）　$\pm\boldsymbol{\sqrt{7}}$



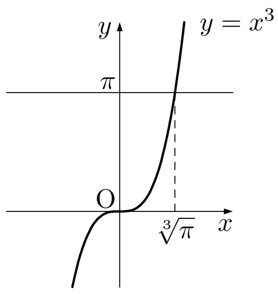
（２）　$\boldsymbol{\sqrt[3]{7}}$



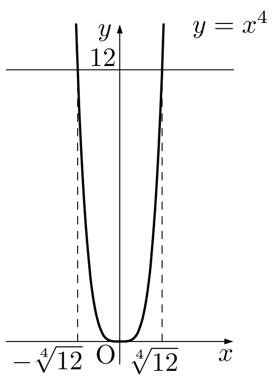
（３）　$\pm\boldsymbol{\sqrt{\pi}}$



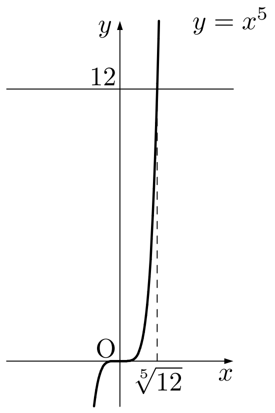
（４）　$\boldsymbol{\sqrt[3]{\pi}}$



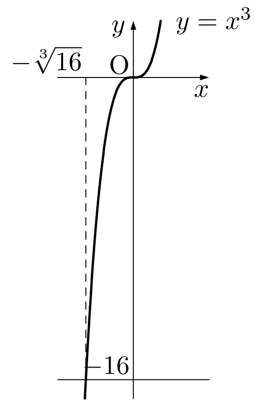
（５）　$\pm\boldsymbol{\sqrt[4]{12}}$



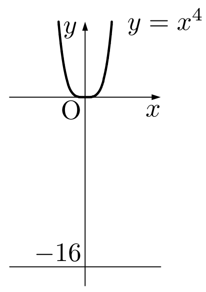
（６）　$\boldsymbol{\sqrt[5]{12}}$



（７）　$\sqrt[3]{-16} = \boldsymbol{-\sqrt[3]{16}}$



（８）　**なし**



195　（１）　与式 $= \sqrt[4]{27 \times 3}$

$= \sqrt[4]{3^3 \times 3}$

$= \sqrt[4]{3^4} = (\sqrt[4]{3})^4 = \mathbf{3}$

（２）　与式 $= \sqrt[3]{\dfrac{4}{5} \times 1250}$

$= \sqrt[3]{\dfrac{4}{5} \times (2 \cdot 5^4)}$

$= \sqrt[3]{2^2 \cdot 2 \times 5^3}$

$= \sqrt[3]{(2 \times 5)^3}$

$= \sqrt[3]{10^3} = (\sqrt[3]{10})^3 = \mathbf{10}$

（３）　与式 $= \sqrt[3]{\dfrac{24}{3}}$

$= \sqrt[3]{8}$

$= \sqrt[3]{2^3} = (\sqrt[3]{2})^3 = \mathbf{2}$

（４）　与式 $= \sqrt[3]{6^2}\ \sqrt[3]{2^4 \times 3}$

$= \sqrt[3]{(2 \times 3)^2 \times (2^4 \times 3)}$

$= \sqrt[3]{(2^2 \times 3^2) \times (2^4 \times 3)}$

$= \sqrt[3]{2^6 \times 3^3}$

$= \sqrt[3]{(2^2)^3 \times 3^3}$

$= \sqrt[3]{(4 \times 3)^3}$

$= \sqrt[3]{12^3} = (\sqrt[3]{12})^3 = \mathbf{12}$

（５）　与式 $= \dfrac{\sqrt[4]{54^3}}{\sqrt[4]{24}}$

$= \sqrt[4]{\dfrac{(2 \times 3^3)^3}{2^3 \times 3}}$

$= \sqrt[4]{\dfrac{2^3 \times 3^9}{2^3 \times 3}}$

$= \sqrt[4]{3^8} = \sqrt[4]{(3^2)^4}$

$= \sqrt[4]{9^4} = (\sqrt[4]{9})^4 = \mathbf{9}$

（6）　与式 $= \dfrac{\sqrt[3]{147\times 63}}{7}$

$= \dfrac{\sqrt[3]{(3\times 7^2)\times(3^2\times 7)}}{7}$

$= \dfrac{\sqrt[3]{3^3\times 7^3}}{7}$

$= \dfrac{\sqrt[3]{(3\times 7)^3}}{7}$

$= \dfrac{\sqrt[3]{21^3}}{7} = \dfrac{(\sqrt[3]{21})^3}{7}$

$= \dfrac{21}{7} = \mathbf{3}$

（7）　与式 $= \dfrac{\sqrt[4]{27\times 9\times 162}}{\sqrt[4]{6^5}}$

$= \sqrt[4]{\dfrac{3^3\times 3^2\times(2\times 3^4)}{(2\times 3)^5}}$

$= \sqrt[4]{\dfrac{2\times 3^9}{2^5\times 3^5}}$

$= \sqrt[4]{\dfrac{3^4}{2^4}}$

$= \sqrt[4]{\left(\dfrac{3}{2}\right)^4} = \left(\sqrt[4]{\dfrac{3}{2}}\right)^4 = \boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

（8）　与式 $= \sqrt[3]{\dfrac{5}{1000}}\sqrt[3]{\dfrac{25}{1000}}$

$= \sqrt[3]{\dfrac{5}{10^3}\times\dfrac{5^2}{10^3}}$

$= \sqrt[3]{\dfrac{5^3}{(10^3)^2}}$

$= \sqrt[3]{\dfrac{5^3}{(10^2)^3}}$

$= \sqrt[3]{\left(\dfrac{5}{100}\right)^3} = \left(\sqrt[3]{\dfrac{5}{100}}\right)^3$

$= \dfrac{5}{100} = \boldsymbol{\dfrac{1}{20}}$

（9）　与式 $= \sqrt[3]{6\sqrt{6}}\times\sqrt{6^2}\div\sqrt[3]{(-3)^3}$

$= \sqrt[3]{(\sqrt{6})^3}\times 6\div(-3)$

$= \dfrac{\sqrt{6}\times 6}{-3} = \boldsymbol{-2\sqrt{6}}$

（10）　与式 $= \left(\dfrac{\sqrt[3]{81}\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{9}} - \dfrac{6}{\sqrt[3]{9}}\right)^3$

$= \left(\dfrac{\sqrt[3]{9^2\times 9}-6}{\sqrt[3]{9}}\right)^3$

$= \left(\dfrac{\sqrt[3]{9^3}-6}{\sqrt[3]{9}}\right)^3$

$= \left(\dfrac{9-6}{\sqrt[3]{9}}\right)^3$

$= \left(\dfrac{3}{\sqrt[3]{9}}\right)^3$

$= \dfrac{3^3}{(\sqrt[3]{9})^3} = \dfrac{27}{9} = \mathbf{3}$

196　（1）　与式 $= x^{-2\cdot 3\cdot(-1)}$

$= \boldsymbol{x^6}$

（2）　与式 $= x^{2+1}y^{1+(-2)}$

$= \boldsymbol{x^3y^{-1}}$　または，　$\boldsymbol{\dfrac{x^3}{y}}$

（3）　与式 $= x^{1-(-2)}y^{-2-1}$

$= \boldsymbol{x^3y^{-3}}$　または，　$\boldsymbol{\dfrac{x^3}{y^3}}$

（4）　与式 $= 2^{-3}(x^{-1})^{-3}$

$= \dfrac{1}{2^3}x^{-1\cdot(-3)}$

$= \boldsymbol{\dfrac{x^3}{8}}$

（5）　与式 $= \dfrac{x^{-3}}{x^{2\cdot(-1)}}$

$= \dfrac{x^{-3}}{x^{-2}}$

$= x^{-3-(-2)}$

$= \boldsymbol{x^{-1}}$　または，　$\boldsymbol{\dfrac{1}{x}}$

（6）　与式 $= \dfrac{10^2(x^3)^2(y^{-2})^2}{5^3(x^{-1})^3(y^2)^3}$

$= \dfrac{100x^{3\cdot 2}y^{-2\cdot 2}}{125x^{-1\cdot 3}y^{2\cdot 3}}$

$= \dfrac{4x^6y^{-4}}{5x^{-3}y^6}$

$= \dfrac{4}{5}x^{6-(-3)}y^{-4-6}$

$= \boldsymbol{\dfrac{4}{5}x^9y^{-10}}$　または，　$\boldsymbol{\dfrac{4x^9}{5y^{10}}}$

（7）　与式 $= (x^{\frac{1}{3}} + y^{-\frac{1}{3}})$

$\times\{(x^{\frac{1}{3}})^2 - x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}} + (y^{-\frac{1}{3}})^2\}$

$= (x^{\frac{1}{3}})^3 + (y^{-\frac{1}{3}})^3$

$= \boldsymbol{x + y^{-1}}$　または，　$\boldsymbol{x + \dfrac{1}{y}}$

197　（1）　与式 $= \sqrt[4]{a^{12}}$

$= a^{\frac{12}{4}} = \boldsymbol{a^3}$

（2）　与式 $= \dfrac{a}{\sqrt[5]{a^3}}$

$= \dfrac{a}{a^{\frac{3}{5}}}$

$= a^{1-\frac{3}{5}} = \boldsymbol{a^{\frac{2}{5}}}$

（3）　与式 $= \dfrac{1}{a^{\frac{5}{6}}}$

$= \boldsymbol{a^{-\frac{5}{6}}}$

（4）　与式 $= a^{-\frac{3}{7}\cdot(-4)}$

$= \boldsymbol{a^{\frac{12}{7}}}$

（5）　与式 $= (a^{-\frac{5}{6}})^3$

$= a^{-\frac{5}{6}\cdot 3}$

$= \boldsymbol{a^{-\frac{5}{2}}}$

（6）　与式 $= \sqrt[3]{a^{\frac{3}{4}}}$

$= (a^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}}$

$= a^{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}}$

$= \boldsymbol{a^{\frac{1}{4}}}$

198　（1）　与式 $= a^{\frac{375}{1000}}$

$= a^{\frac{3}{8}} = \boldsymbol{\sqrt[8]{a^3}}$

（2）　与式 $= a^{-\frac{12}{10}}$

$= a^{\frac{-6}{5}} = \boldsymbol{\sqrt[5]{a^{-6}}}$

（3）　与式 $= a^{-0.75}$

$= a^{-\frac{75}{100}}$

$= a^{\frac{-3}{4}} = \boldsymbol{\sqrt[4]{a^{-3}}}$

（4）　与式 $= a^{-(-1.75)}$

$= a^{\frac{175}{100}}$

$= a^{\frac{7}{4}} = \boldsymbol{\sqrt[4]{a^{7}}}$

（5）　与式 $= a^{\frac{15}{10}} \times a^{\frac{7}{10}}$

$= a^{\frac{15}{10}+\frac{7}{10}}$

$= a^{\frac{22}{10}}$

$= a^{\frac{11}{5}} = \boldsymbol{\sqrt[5]{a^{11}}}$

（6）　与式 $= \dfrac{a^{\frac{7}{10}}}{a^{\frac{13}{10}}}$

$= a^{\frac{7}{10}-\frac{13}{10}}$

$= a^{-\frac{6}{10}}$

$= a^{\frac{-3}{5}} = \boldsymbol{\sqrt[5]{a^{-3}}}$

199　（1）　与式 $= a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{1}{2}}$

$= a^{\frac{1}{4}+\frac{2}{4}}$

$= \boldsymbol{a^{\frac{3}{4}}}$　または　$\boldsymbol{\sqrt[4]{a^{3}}}$

（2）　与式 $= a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{4}{5}}$

$= a^{\frac{10}{15}+\frac{12}{15}}$

$= \boldsymbol{a^{\frac{22}{15}}}$　または　$\boldsymbol{\sqrt[15]{a^{22}}}$

（3）　与式 $= \dfrac{a \cdot a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{2}}}$

$= a^{\frac{6}{6}+\frac{1}{6}-\frac{3}{6}}$

$= a^{\frac{4}{6}}$

$= \boldsymbol{a^{\frac{2}{3}}}$　または　$\boldsymbol{\sqrt[3]{a^{2}}}$

（4）　与式 $= \dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}}$

$= a^{\frac{4}{6}-\frac{1}{6}}$

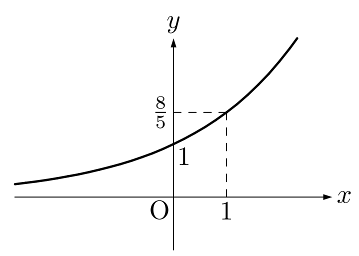
$= a^{\frac{3}{6}}$

$= \boldsymbol{a^{\frac{1}{2}}}$　または　$\boldsymbol{\sqrt{a}}$

200　（1）　$x = 0$ のとき，$y = \left(\dfrac{8}{5}\right)^0 = 1$

$x = 1$ のとき，$y = \left(\dfrac{8}{5}\right)^1 = \dfrac{8}{5}$

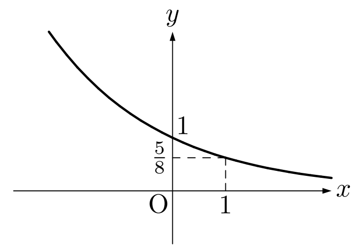
グラフは，2 点 $(0,\ 1), \left(1,\ \dfrac{8}{5}\right)$ を通り，単調に増加する曲線となる．



（2）　$x = 0$ のとき，$y = \left(\dfrac{5}{8}\right)^0 = 1$

$x = 1$ のとき，$y = \left(\dfrac{5}{8}\right)^1 = \dfrac{5}{8}$

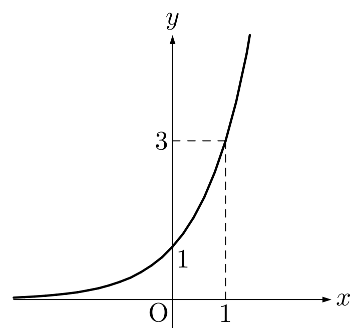
グラフは，2 点 $(0,\ 1), \left(1,\ \dfrac{5}{8}\right)$ を通り，単調に減少する曲線となる．



（3）　$x = 0$ のとき，$y = 3^0 = 1$

$x = 1$ のとき，$y = 3^1 = 3$

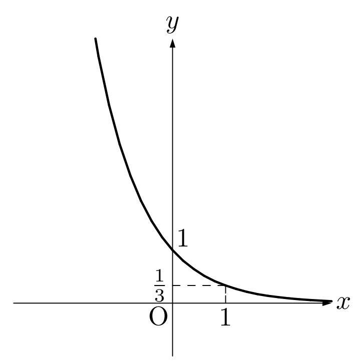
グラフは，2 点 $(0,\ 1), (1,\ 3)$ を通り，単調に増加する曲線となる．



（4）　$x = 0$ のとき，$y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^0 = 1$

$x = 1$ のとき，$y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^1 = \dfrac{1}{3}$

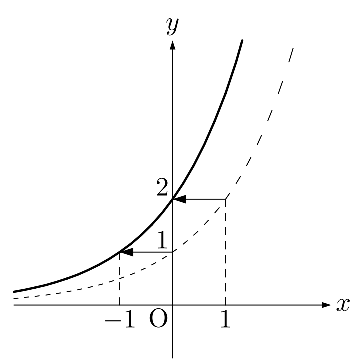
グラフは，2 点 $(0,\ 1), \left(1,\ \dfrac{1}{3}\right)$ を通り，単調に減少する曲線となる．



201　（1）　$y = 2^1 \cdot 2^x$

$= 2^{x+1}$

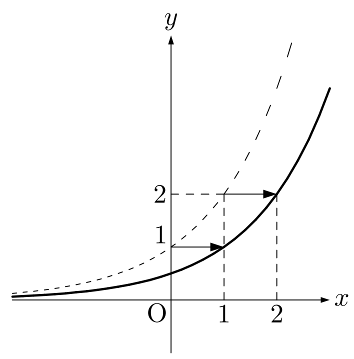
よって，この関数のグラフは，$y = 2^x$ のグラフを，x 軸方向に -1 平行移動したものである．



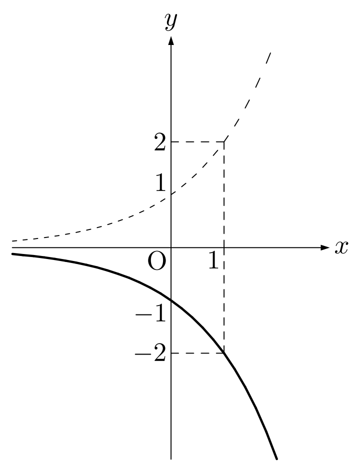
（2）　$y=\dfrac{2^x}{2^1}$

$=2^{x-1}$

よって，この関数のグラフは，$y=2^x$ のグラフを，x 軸方向に 1 平行移動したものである．



（3）　この関数のグラフは，$y=2^x$ のグラフを，x 軸に関して対称移動したものである．

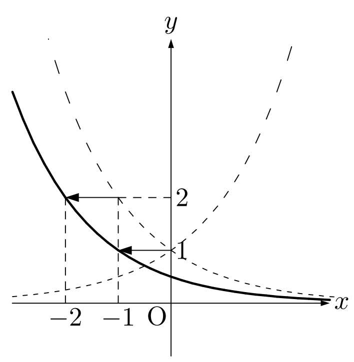


（4）　$y=2^{-1}\cdot 2^{-x}$

$=2^{-1-x}$

$=2^{-(x+1)}$

よって，この関数のグラフは，$y=2^{-x}$ のグラフを，x 軸方向に -1 平行移動したものであり，$y=2^{-x}$ のグラフは，$y=2^x$ のグラフを y 軸に関して対称移動したものであるから，$y=2^x$ のグラフを y 軸に関して対称移動し，x 軸方向に -1 平行移動したものである．

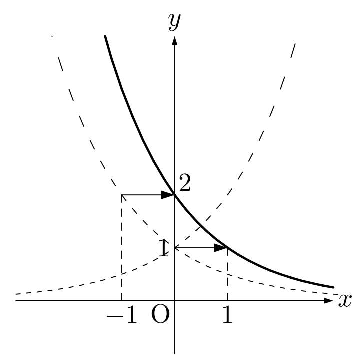


（5）　$y=2^1\cdot 2^{-x}$

$=2^{1-x}$

$=2^{-(x-1)}$

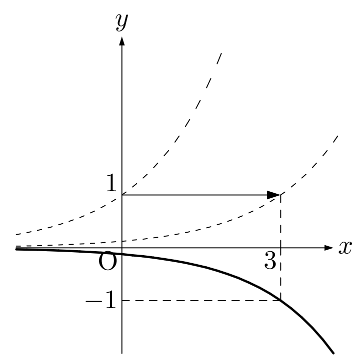
よって，この関数のグラフは，$y=2^{-x}$ のグラフを，x 軸方向に 1 平行移動したものであり，$y=2^{-x}$ のグラフは，$y=2^x$ のグラフを y 軸に関して対称移動したものであるから，$y=2^x$ のグラフを y 軸に関して対称移動し，x 軸方向に 1 平行移動したものである．



（6）　$y=-(2^{-1})^{3-x}$

$=-2^{x-3}$

よって，この関数のグラフは，$y=2^x$ のグラフを，x 軸方向に 3 平行移動したグラフを x 軸に関して対称移動したものである．



202（1）　$3^{3x}=81^{\frac{1}{3}}$

$3^{3x}=(3^4)^{\frac{1}{3}}$

$3^{3x}=3^{\frac{4}{3}}$

よって

$3x=\dfrac{4}{3}$

$\boldsymbol{x=\dfrac{4}{9}}$

（2）　$(2^3)^{2x-4}=2^1$

$2^{3(2x-4)}=2^1$

よって

$3(2x-4)=1$

$6x-12=1$

$6x=13$

$\boldsymbol{x=\dfrac{13}{6}}$

（3）　$5^{-x}=125^{\frac{1}{2}}$

$5^{-x}=(5^3)^{\frac{1}{2}}$

$5^{-x}=5^{\frac{3}{2}}$

よって

$-x=\dfrac{3}{2}$

$\boldsymbol{x=-\dfrac{3}{2}}$

（4）　$3^x=X$ とおく．ただし，$X>0$

$(3^x)^2-4\cdot 3^x+3=0$

$X^2-4X+3=0$

$(X-1)(X-3)=0$

よって，$X=1,\ 3$

$X=1$ のとき，$3^x=1$ より，$x=0$

$X=3$ のとき，$3^x=3$ より，$x=1$
したがって，$\boldsymbol{x=0,\ 1}$

（5）　$\left(\frac{1}{2}\right)^x=X$ とおく．ただし，$X>0$

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-2\left(\frac{1}{2}\right)^x-8=0$$
$$X^2-2X-8=0$$
$$(X+2)(X-4)=0$$

$X>0$ より，$X=4$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x=4$$
$$(2^{-1})^x=2^2$$
$$2^{-x}=2^2$$

よって，$-x=2$ であるから，$\boldsymbol{x=-2}$

203（1）　$2^x<\frac{1}{2^3}$

$2^x<2^{-3}$

底は 2 で 1 より大きいので

$\boldsymbol{x<-3}$

（2）　$2^{x-1}>2^3$

底は 2 で 1 より大きいので

$x-1>3$

$\boldsymbol{x>4}$

（3）　$3^{3x-4}>(3^2)^{2x}$

$3^{3x-4}>3^{4x}$

底は 3 で 1 より大きいので

$3x-4>4x$

$-x>4$

$\boldsymbol{x<-4}$

（4）　$\frac{1}{5^x}>5^2$

$5^{-x}>5^2$

底は 5 で 1 より大きいので

$-x>2$

$\boldsymbol{x<-2}$

CHECK

204（1）　与式 $=(-\sqrt[3]{64})\cdot(-\sqrt[5]{32})$

$=\sqrt[3]{4^3}\cdot\sqrt[5]{2^5}$

$=(\sqrt[3]{4})^3\cdot(\sqrt[5]{2})^5$

$=4\cdot 2=\mathbf{8}$

（2）　与式 $=|-3|\sqrt[3]{3^3}$

$=3\cdot(\sqrt[3]{3})^3$

$=3\cdot 3=\mathbf{9}$

（3）　与式 $=\sqrt[3]{16\times 2}$

$=\sqrt[3]{2^4\times 2}$

$=\sqrt[3]{2^5}$

$=\sqrt[3]{2^3\times 2^2}$

$=\sqrt[3]{2^3}\times\sqrt[3]{2^2}$

$=(\sqrt[3]{2})^3\times\sqrt[3]{4}=\boldsymbol{2\sqrt[3]{4}}$

（4）　与式 $=\dfrac{\sqrt[3]{(2^3)^2}}{\sqrt[4]{(3^2)^2}}$

$=\dfrac{\sqrt[3]{(2^2)^3}}{\sqrt[4]{3^4}}$

$=\dfrac{\sqrt[3]{4^3}}{\sqrt[4]{3^4}}$

$=\dfrac{(\sqrt[3]{4})^3}{(\sqrt[4]{3})^4}=\boldsymbol{\dfrac{4}{3}}$

（5）　与式 $=10\sqrt[3]{0.6^3}$

$=10(\sqrt[3]{0.6})^3$

$=10\cdot 0.6=\mathbf{6}$

（6）　与式 $=3\sqrt[3]{24\times 3\times 81}$

$=3\sqrt[3]{(2^3\times 3)\times 3\times(3^4)}$

$=3\sqrt[3]{2^3\times 3^6}$

$=3\sqrt[3]{2^3\times(3^2)^3}$

$=3\sqrt[3]{(2\times 9)^3}$

$=3\sqrt[3]{18^3}$

$=3(\sqrt[3]{18})^3$

$=3\cdot 18=\mathbf{54}$

205（1）　**正しい**

（2）　**正しくない**　　$a=-1$ のとき，左辺 $=1$，右辺 $=-1$

（3）　**正しい**

（4）　**正しい**

（5）　**正しい**

（6）　**正しくない**　　$a<0$ または $b<0$ のとき，右辺を満たす実数が存在しない．

（7）　**正しくない**　　$a<0$ のとき，右辺を満たす実数が存在しない．

（8）　**正しくない**　　$a=1$ のとき，左辺 $=1$，右辺 $=-1$

（9）　**正しい**

206（1）　与式 $=\dfrac{1}{a^2\cdot a^{\frac{1}{3}}}$

$=\dfrac{1}{a^{2+\frac{1}{3}}}$

$=\dfrac{1}{a^{\frac{7}{3}}}=\boldsymbol{a^{-\frac{7}{3}}}$

（2）　与式 $=a\cdot a^{\frac{3}{4}}$

$=a^{1+\frac{3}{4}}=\boldsymbol{a^{\frac{7}{4}}}$

（3）　与式 $=\sqrt{a^{\frac{4}{3}}}$

$=(a^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}}$

$=a^{\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}}=\boldsymbol{a^{\frac{2}{3}}}$

207 (1)　与式 $= a^{\frac{4}{3}-\frac{1}{2}}$

$= a^{\frac{8}{6}-\frac{3}{6}}$

$= a^{\frac{5}{6}} = \boldsymbol{\sqrt[6]{a^5}}$

(2)　与式 $= \dfrac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{5}{6}}}$

$= a^{\frac{4}{3}-\frac{5}{6}}$

$= a^{\frac{8}{6}-\frac{5}{6}}$

$= a^{\frac{3}{6}} = a^{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\sqrt{a}}$

(3)　与式 $= \dfrac{a^{\frac{3}{5}}}{a^2}$

$= a^{\frac{3}{5}-2}$

$= a^{\frac{3}{5}-\frac{10}{5}}$

$= a^{-\frac{7}{5}} = a^{\frac{-7}{5}} = \boldsymbol{\sqrt[5]{a^{-7}}}$

208 (1)　与式 $= \dfrac{a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{5}{6}}}$

$= a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{5}{6}}$

$= a^{\frac{2}{6}+\frac{3}{6}-\frac{5}{6}}$

$= a^0 = \mathbf{1}$

(2)　与式 $= \left(\dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{4}}}\right)^5 \times a^{\frac{1}{6}}$

$= (a^{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}})^5 \times a^{\frac{1}{6}}$

$= (a^{\frac{4}{12}-\frac{3}{12}})^5 \times a^{\frac{1}{6}}$

$= (a^{\frac{1}{12}})^5 \times a^{\frac{1}{6}}$

$= a^{\frac{5}{12}} \times a^{\frac{1}{6}}$

$= a^{\frac{5}{12}+\frac{1}{6}}$

$= a^{\frac{5}{12}+\frac{2}{12}}$

$= \boldsymbol{a^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{a^7}}$

(3)　与式 $= \dfrac{a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{12}}}{a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{4}}}$

$= \dfrac{a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{12}}}{a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}}$

$= \dfrac{a^{\frac{6}{12}+\frac{1}{12}}}{a^{\frac{4}{12}+\frac{3}{12}}}$

$= \dfrac{a^{\frac{7}{12}}}{a^{\frac{7}{12}}} = \mathbf{1}$

209 (1)　与式 $= \dfrac{(x^{-1})^2-(y^{-1})^2}{x^{-1}+y^{-1}}$

$= \dfrac{(x^{-1}+y^{-1})(x^{-1}-y^{-1})}{x^{-1}+y^{-1}}$

$= \boldsymbol{x^{-1}-y^{-1} = \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}}$

(2)　与式 $= \dfrac{3a}{(4a^2)^{-\frac{1}{2}}}$

$= \dfrac{3a}{4^{-\frac{1}{2}}(a^2)^{-\frac{1}{2}}}$

$= \dfrac{3a}{4^{-\frac{1}{2}}a^{-1}}$

$= 3 \cdot 4^{-(-\frac{1}{2})}a^{1-(-1)}$

$= 3 \cdot 4^{\frac{1}{2}}a^2$

$= 3 \cdot (2^2)^{\frac{1}{2}}a^2$

$= 3 \cdot 2a^2 = \boldsymbol{6a^2}$

(3)　与式 $= 2^{\frac{2}{3}}(a^2)^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}(a^{-1})^{\frac{1}{3}}$

$= 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{4}{3}} \cdot a^{-\frac{1}{3}}$

$= 2^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}$

$= 2^1a^1 = \boldsymbol{2a}$

(4)　与式 $= (a^{-\frac{1}{2}})^2 + 2 \cdot a^{-\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} + (a^{\frac{1}{2}})^2$

$= a^{-1} + 2 \cdot a^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} + a^1$

$= a^{-1} + 2 \cdot a^0 + a$

$= \boldsymbol{a^{-1} + 2 + a = \dfrac{1}{a} + 2 + a}$

210 (1)　$y = 3^2 \cdot 3^x$

$= 3^{x+2}$

よって，この関数のグラフは，$y = 3^x$ のグラフを，**x 軸方向に -2 平行移動**したものである．

(2)　$y = -(3^{-1})^x$

$= -3^{-x}$

よって，この関数のグラフは，$y = 3^x$ のグラフを，**原点に関して対称移動**したものである．

(3)　$y = 3 \cdot (3^{-1})^x + 1$

$= 3 \cdot 3^{-x} + 1$

$= 3^{1-x} + 1$

$= 3^{-(x-1)} + 1$

よって，この関数のグラフは，$y = 3^x$ のグラフを，**y 軸に関して対称移動し，x 軸方向に 1，y 軸方向に 1 平行移動**したものである．

(4)　$y = -\dfrac{3^x}{3^3}$

$= -3^{x-3}$

よって，この関数のグラフは，$y = 3^x$ のグラフを，**x 軸方向に 3 平行移動し，x 軸に関して対称移動**したものである．

211 (1)　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x = X$ とおく．ただし，$X > 0$

$9\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\right\}^2 - 28\left(\dfrac{1}{3}\right)^x + 3 = 0$

$9X^2 - 28X + 3 = 0$

$(9X-1)(X-3) = 0$

よって，$X = \dfrac{1}{9}$, 3　これは，$X > 0$ を満たす．

$X = \dfrac{1}{9}$ のとき，$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x = \dfrac{1}{9} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2$ より，$x = 2$

$X = 3$ のとき，$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x = 3$ より

$(3^{-1})^x = 3$

$3^{-x} = 3^1$

よって，$-x = 1$ であるから，$x = -1$

したがって，$\boldsymbol{x = -1}$**，2**

(2)　$2^x = X$ とおく．ただし，$X > 0$

$(2^x)^2 - 6 \cdot 2^x - 16 = 0$

$X^2 - 6X - 16 = 0$

$(X+2)(X-8) = 0$

$X > 0$ より，$X = 8$

$2^x = 8 = 2^3$ より，$\boldsymbol{x = 3}$

212 (1)
$(2^{-1})^x > 32^{\frac{1}{3}}$
$2^{-x} > (2^5)^{\frac{1}{3}}$
$2^{-x} > 2^{\frac{5}{3}}$
底は 2 で 1 より大きいので
$-x > \frac{5}{3}$
$\boldsymbol{x < -\frac{5}{3}}$

(2)
$3^{2x-1} > \frac{1}{81^{\frac{1}{3}}}$
$3^{2x-1} > \frac{1}{(3^4)^{\frac{1}{3}}}$
$3^{2x-1} > \frac{1}{3^{\frac{4}{3}}}$
$3^{2x-1} > 3^{-\frac{4}{3}}$
底は 3 で 1 より大きいので
$2x - 1 > -\frac{4}{3}$
$6x - 3 > -4$
$6x > -1$
$\boldsymbol{x > -\frac{1}{6}}$

STEP UP

213 (1)
$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{\frac{1}{2}}$
$2^{-x} = 2^{\frac{1}{2}}$
よって
$-x = \frac{1}{2}$
$\boldsymbol{x = -\frac{1}{2}}$

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = X$ とおく．ただし，$X > 0$
$\left(\frac{1}{2}\right)^2 x - \frac{9}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{1}{8} = 0$
$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2 - \frac{9}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{1}{8} = 0$
$X^2 - \frac{9}{8}X + \frac{1}{8} = 0$
$8X^2 - 9X + 1 = 0$
$(8x - 1)(x - 1) = 0$
$X = \frac{1}{8},\ 1$　これは，$X > 0$ を満たす．
$X = \frac{1}{8}$ のとき，$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$ より，$x = 3$
$X = 1$ のとき，$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 1$ より，$x = 0$
したがって，$\boldsymbol{x = 3,\ 0}$

(3) $2^x = X$ とおく．ただし，$X > 0$
$2^{2x} \cdot 2^{-1} + 2 \cdot 2^x - 6 = 0$
$\frac{(2^x)^2}{2} + 2 \cdot 2^x - 6 = 0$
$(2^x)^2 + 4 \cdot 2^x - 12 = 0$
$X^2 + 4X - 12 = 0$
$(X + 6)(X - 2) = 0$
$X = -6,\ 2$
$X > 0$ より，$X = 2$
$2^x = 2 = 2^1$ であるから，$\boldsymbol{x = 1}$

(4) $2^x = X$ とおく．ただし，$X > 0$
$2^{2x} \cdot 2^1 - 5 \cdot 2^x \cdot 2^4 + (2^x)^3 = 0$
$(2^x)^2 \cdot 2 - 80 \cdot 2^x + (2^x)^3 = 0$
$X^3 + 2X^2 - 80X = 0$
$X(X^2 + 2X - 80) = 0$
$X(X + 10)(X - 8) = 0$
$X = 0,\ -10,\ 8$
$X > 0$ より，$X = 8$
$2^x = 8 = 2^3$ であるから，$\boldsymbol{x = 3}$

214 (1)

$2^{-\frac{7}{4}}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{64}}$	$\frac{1}{4}$	$\sqrt[5]{2^{-9}}$
↓	↓	↓	↓
$2^{-\frac{7}{4}}$	$\frac{1}{(2^6)^{\frac{1}{4}}}$	$\frac{1}{2^2}$	$2^{-\frac{9}{5}}$
↓	↓	↓	↓
$2^{-\frac{7}{4}}$	$\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}$	2^{-2}	$2^{-\frac{9}{5}}$
↓	↓	↓	↓
$2^{-\frac{7}{4}}$	$2^{-\frac{3}{2}}$	2^{-2}	$2^{-\frac{9}{5}}$
↓	↓	↓	↓
$2^{-\frac{35}{20}}$	$2^{-\frac{30}{20}}$	$2^{-\frac{40}{20}}$	$2^{-\frac{36}{20}}$

$-\frac{40}{20} < -\frac{36}{20} < -\frac{35}{20} < -\frac{30}{20}$ であり，$y = 2^x$ は，単調に増加するので
$2^{-2} < 2^{-\frac{9}{5}} < 2^{-\frac{7}{4}} < 2^{-\frac{3}{2}}$
よって
$\boldsymbol{\frac{1}{4},\ \sqrt[5]{2^{-9}},\ 2^{-\frac{7}{4}},\ \frac{1}{\sqrt[4]{64}}}$

(2)

$3\sqrt[3]{3}$	$\sqrt[4]{243}$	$3\sqrt[5]{9}$	$3\sqrt[6]{3}$
↓	↓	↓	↓
$3 \cdot 3^{\frac{1}{3}}$	$(3^5)^{\frac{1}{4}}$	$3 \cdot (3^2)^{\frac{1}{5}}$	$3 \cdot 3^{\frac{1}{6}}$
↓	↓	↓	↓
$3^{\frac{4}{3}}$	$3^{\frac{5}{4}}$	$3 \cdot 3^{\frac{2}{5}}$	$3^{\frac{7}{6}}$
↓	↓	↓	↓
$3^{\frac{4}{3}}$	$3^{\frac{5}{4}}$	$3^{\frac{7}{5}}$	$3^{\frac{7}{6}}$
↓	↓	↓	↓
$3^{\frac{80}{60}}$	$3^{\frac{75}{60}}$	$3^{\frac{84}{60}}$	$3^{\frac{70}{60}}$

$\frac{70}{60} < \frac{75}{60} < \frac{80}{60} < \frac{84}{60}$ であり，$y = 3^x$ は，単調に増加するので
$3^{\frac{7}{6}} < 3^{\frac{5}{4}} < 3^{\frac{4}{3}} < 3^{\frac{7}{5}}$
よって
$\boldsymbol{3\sqrt[6]{3},\ \sqrt[4]{243},\ 3\sqrt[3]{3},\ 3\sqrt[5]{9}}$

215 (1) $0.3^x > 0.3^2$
底の 0.3 は 1 より小さいので，$\boldsymbol{x < 2}$

(2) $2^x = X$ とおく．ただし，$X > 0$
$2^{2x} \cdot 2^3 - 33 \cdot 2^x + 4 < 0$
$8(2^x)^2 - 33 \cdot 2^x + 4 < 0$
$8X^2 - 33X + 4 < 0$
$(8X - 1)(X - 4) < 0$
$\frac{1}{8} < X < 4$
これと $X > 0$ より，$\frac{1}{8} < X < 4$ であるから
$\frac{1}{8} < 2^x < 4$

$$\frac{1}{2^3} < 2^x < 2^2$$
$$2^{-3} < 2^x < 2^2$$

底の 2 は 1 より大きいので，$\boldsymbol{-3 < x < 2}$

216　$a^{2x} = 5$ より，$a^{-2x} = \dfrac{1}{a^{2x}} = \dfrac{1}{5}$

$$与式 = \frac{(a^{2x})^2 - (a^{-2x})^2}{a^x - a^{-x}}$$
$$= \frac{(a^{2x} - a^{-2x})(a^{2x} + a^{-2x})}{a^x - a^{-x}}$$
$$= \frac{(a^x - a^{-x})(a^x + a^{-x})(a^{2x} + a^{-2x})}{a^x - a^{-x}}$$
$$= (a^x + a^{-x})(a^{2x} + a^{-2x})$$

ここで

$$(a^x + a^{-x})^2 = a^{2x} + 2 \cdot a^x \cdot a^{-x} + a^{-2x}$$
$$= 5 + 2 + \frac{1}{5}$$
$$= 7 + \frac{1}{5} = \frac{36}{5}$$

$a^x + a^{-x} > 0$ であるから，$a^x + a^{-x} = \dfrac{6}{\sqrt{5}}$

よって

$$与式 = \frac{6}{\sqrt{5}}\left(5 + \frac{1}{5}\right)$$
$$= \frac{6}{\sqrt{5}} \cdot \frac{26}{5}$$
$$= \frac{156}{5\sqrt{5}} = \boldsymbol{\frac{156\sqrt{5}}{25}}$$

〔別解〕

$a^{2x} = 5$，$a^x > 0$ より，$a^x = \sqrt{5}$

また，$a^{-x} = \dfrac{1}{a^x} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

よって

$$与式 = \frac{(a^x)^4 - (a^{-x})^4}{a^x - a^{-x}}$$
$$= \frac{(\sqrt{5})^4 - \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^4}{\sqrt{5} - \dfrac{1}{\sqrt{5}}}$$
$$= \frac{25 - \dfrac{1}{25}}{\sqrt{5} - \dfrac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{\left(25 - \dfrac{1}{25}\right) \times 25\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5} - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) \times 25\sqrt{5}}$$
$$= \frac{(625 - 1) \times \sqrt{5}}{(5 - 1) \times 25}$$
$$= \frac{624\sqrt{5}}{4 \cdot 25} = \boldsymbol{\frac{156\sqrt{5}}{25}}$$

217　$与式 = (3^3)^x + (3^3)^{-x}$

$$= (3^x)^3 + (3^{-x})^3$$
$$= (3^x + 3^{-x})(3^{2x} - 3^x \cdot 3^{-x} + 3^{-2x})$$
$$= (3^x + 3^{-x})(3^{2x} + 3^{-2x} - 1)$$

ここで

$$3^{2x} + 3^{-2x} = (3^x + 3^{-x})^2 - 2 \cdot 3^x \cdot 3^{-x}$$
$$= 4^2 - 2 \cdot 1 = 14$$

よって

$$与式 = 4(14 - 1)$$
$$= 4 \cdot 13 = \boldsymbol{52}$$

218　(1)　$4^x + 4^{-x} = (2^x)^2 + (2^{-x})^2$

$$= (2^x + 2^{-x})^2 - 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x}$$
$$= t^2 - 2$$

よって

$$f(x) = (t^2 - 2) - t + 1$$
$$= \boldsymbol{t^2 - t - 1}$$

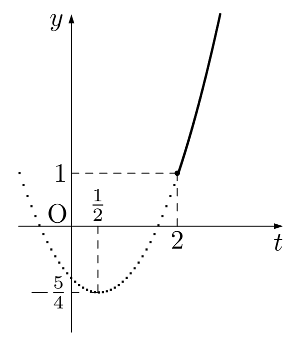
(2)　$2^x > 0$，$2^{-x} > 0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係より

$$2^x + 2^{-x} \geqq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}}$$
$$= 2 \cdot 1 = 2$$

したがって，$\boldsymbol{t \geqq 2}$

(3)　$t^2 - t - 1 = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} - 1$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

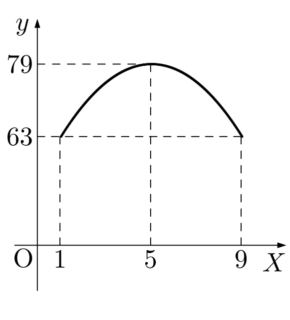


よって，$t = 2$ のとき，**最小値 1** をとる．

219　$3^x = X$ とおく．

$$y = -(3^x)^2 + 10 \cdot 3^x + 54$$
$$= -X^2 + 10X + 54$$
$$= -(X^2 - 10X) + 54$$
$$= -\{(X - 5)^2 - 25\} + 54$$
$$= -(X - 5)^2 + 79$$

(1)　$0 \leqq x \leqq 2$ より，$3^0 \leqq 3^x \leqq 3^2$ であるから，$1 \leqq X \leqq 9$



よって

$X = 5$ のとき，**最大値 79**

$X = 1,\ 9$ のとき，**最小値 63**

(2)　$-2 \leqq x \leqq 0$ より，$3^{-2} \leqq 3^x \leqq 3^0$ であるから，$\dfrac{1}{9} \leqq X \leqq 1$

よって

$X = 1$ のとき，**最大値 63**

$X = \dfrac{1}{9}$ のとき，**最小値** $\boldsymbol{\dfrac{4463}{81}}$