2章　方程式と不等式

練習問題 1-A

1. (1) $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2}$

$= \boldsymbol{\dfrac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}}$

(2) $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 3 \cdot 5}}{3}$

$= \dfrac{1 \pm \sqrt{-14}}{3}$

$= \boldsymbol{\dfrac{1 \pm \sqrt{14}\, i}{3}}$

(3) 左辺を展開して整理すると

$(x^2 + 2x + 1) + (x^2 - 4x + 4) = 0$

$2x^2 - 2x + 5 = 0$

よって

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 2 \cdot 5}}{2}$

$= \dfrac{1 \pm \sqrt{-9}}{2}$

$= \boldsymbol{\dfrac{1 \pm 3\, i}{2}}$

(4) $P(x) = 3x^3 - 2x^2 - 6x - 1$ とおくと

$P(-1) = 0$ なので，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ．

$$\begin{array}{rrrr|r} 3 & -2 & -6 & -1 & -1 \\ & -3 & 5 & 1 & \\ \hline 3 & -5 & -1 & 0 & \end{array}$$

$P(x) = (x + 1)(3x^2 - 5x - 1)$

よって，$(x + 1)(3x^2 - 5x - 1) = 0$

$x + 1 = 0$ より，$x = -1$

$3x^2 - 5x - 1 = 0$ より

$x = \dfrac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3}$

$= \dfrac{5 \pm \sqrt{37}}{6}$

したがって，$x = \boldsymbol{-1,\ \dfrac{5 \pm \sqrt{37}}{6}}$

(5) 両辺に $(x - 2)(x - 4)$ をかけて

$(x - 4) - (x - 2) = 2(x - 2)(x - 4)$

$x - 4 - x + 2 = 2x^2 - 12x + 16$

$2x^2 - 12x + 18 = 0$

$x^2 - 6x + 9 = 0$

$(x - 3)^2 = 0$

$x = \boldsymbol{3}$

(6) 両辺を 2 乗して

$5 - x^2 = (2x + 5)^2$

$5 - x^2 = 4x^2 + 20x + 25$

$5x^2 + 20x + 20 = 0$

$x^2 + 4x + 4 = 0$

$(x + 2)^2 = 0$

$x = -2$

これを元の方程式に代入して

左辺 $= \sqrt{5 - 4} = 1$

右辺 $= -2 + 5 = 1$

よって，$x = \boldsymbol{-2}$

2. (1) 3 つの式を、上から①，②，③とする．

$$\begin{array}{llrl} ① & & 2x - y + 3z & = 7 \\ ② & +) & x + y - z & = 4 \\ \hline & & 3x \quad\ + 2z & = 11 \cdots ④ \end{array}$$

$$\begin{array}{llrl} ① \times 3 & & 6x - 3y + 9z & = 21 \\ ③ & +) & 2x + 3y - 4z & = 8 \\ \hline & & 8x \quad\ + 5z & = 29 \cdots ⑤ \end{array}$$

$$\begin{array}{llrl} ④ \times 5 & & 15x + 10z & = 55 \\ ⑤ \times 2 & -) & 16x + 10z & = 58 \\ \hline & & -x & = -3 \end{array}$$

$x = 3 \cdots ⑥$

⑥を④に代入して，$z = 1 \cdots ⑦$

⑥，⑦を②に代入して，$y = 2$

よって，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z) = (3,\ 2,\ 1)}$

(2) 2 つの式を、上から①，②とする．

②より，$y = 3 - x \cdots ②'$

②$'$ を②に代入して，

$x^2 - 2x(3 - x) - 2(3 - x)^2 = 0$

$x^2 - 6x + 2x^2 - 18 + 12x - 2x^2 = 0$

$x^2 + 6x - 18 = 0$

$x = -3 \pm \sqrt{9 - 1 \cdot (-18)}$

$= -3 \pm \sqrt{27}$

$= -3 \pm 3\sqrt{3} \cdots ③$

③を ②$'$ に代入して，

$y = 3 - (-3 \pm 3\sqrt{3}) = 6 \mp 3\sqrt{3}$

よって，$\boldsymbol{(x,\ y) = (-3 \pm 3\sqrt{3},\ 6 \mp 3\sqrt{3})}$

(複号同順)

3. （1） 連立方程式の形に書き直すと

$$\begin{cases} x+y-2=2x-y \\ 2x-y=x-2y+4 \end{cases}$$

整理すると，

$$\begin{cases} -x+2y=2 \\ x+y=4 \end{cases}$$

これを解いて， $\boldsymbol{(x,\ y)=(2,\ 2)}$

（2） 連立方程式の形に書き直すと

$$\begin{cases} x+2y+4=2x-y+7 & \cdots ① \\ x+2y+4=2y-x & \cdots ② \end{cases}$$

①より，$-x+3y=3 \quad \cdots ①'$

②より，$2x=-4$

$$x=-2 \quad \cdots ②'$$

②$'$ を①$'$ に代入して

$$2+3y=3$$

$$y=\frac{1}{3}$$

よって，$\boldsymbol{(x,y)=\left(-2,\ \frac{1}{3}\right)}$

（3） 連立方程式の形に書き直すと

$$\begin{cases} 2x+3y-5z-3=0 & \cdots ① \\ x-y+z=0 & \cdots ② \\ 3x-6y+2z+7=0 & \cdots ③ \end{cases}$$

$$\begin{array}{lrl} ②\times 3 & 3x-3y+3z & =0 \\ ① & +)\ \ 2x+3y-5z & =3 \\ \hline & 5x\qquad -2z & =3\cdots ④ \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} ①\times 2 & 4x+6y-10z & =6 \\ ③ & +)\ \ 3x-6y+2z & =-7 \\ \hline & 7x\qquad -8z & =-1\cdots ⑤ \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} ④\times 4 & 20x-8z & =12 \\ ⑤ & -)\ \ 7x-8z & =-1 \\ \hline & 13x & =13 \\ & x & =1\cdots ⑥ \end{array}$$

⑥を④に代入して，$z=1 \quad \cdots ⑦$

⑥，⑦を②に代入して，$y=2$

よって，$\boldsymbol{(x,y,z)=(1,\ 2,\ 1)}$

4. 与式を整理すると，

$$x^2+(4-k)x-4-5k=0$$

判別式を D とすると，

$$D=(4-k)^2-4(-4-5k)=k^2+12k+32$$

2 重解をもつための条件は，$D=0$ であるから

$$k^2+12k+32=0$$

$$(k+4)(k+8)=0$$

よって，$\boldsymbol{k=-4,-8}$

5. 解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta=4,\quad \alpha\beta=-\frac{3}{2}$$

（1） 与式 $=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$$=4^2-2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$=16+3=\mathbf{19}$$

（2） 与式 $=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$$=4^3-3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot 4$$

$$=64+18=\mathbf{82}$$

（3） 与式 $=(\alpha^2+\beta^2)^2-2(\alpha\beta)^2$

$$=19^2-2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2$$

$$=361-\frac{9}{2}=\boldsymbol{\frac{713}{2}}$$

6. （1）

$$\begin{array}{ccccc} 15 & & 8 & & 22 \\ \hline 5 & & 4 & \longrightarrow & 12 \\ 3 & & 2 & \longrightarrow & 10 \end{array}$$

与式 $=\boldsymbol{(5x+4)(3x+2)}$

（2）$8x^2-12x+5=0$ を解くと，

$$x=\frac{6\pm\sqrt{6^2-8\cdot 5}}{8}$$

$$=\frac{6\pm\sqrt{-4}}{8}$$

$$=\frac{3\pm\ i}{4}$$

与式 $=\boldsymbol{8\left(x-\frac{3+i}{4}\right)\left(x-\frac{3-i}{4}\right)}$

7. 道路の幅を xm とすると，

$$30\times 50-(30-2x)(50-2x)=200$$

これを解くと，

$$1500-(4x^2-160x+1500)=200$$

$$4x^2-160x+200=0$$

$$x^2-40x+50=0$$

$$x=20\pm\sqrt{20^2-50}$$

$$=20\pm\sqrt{350}$$

$$=20\pm 5\sqrt{14}$$

$0<x<15$ より，道の幅は $\boldsymbol{20-5\sqrt{14}}$ **(m)**

8. 右辺を x について降べきの順に整理すると

$$\begin{aligned}右辺 &= a+b(x-2)+c(x^2-4x+4)\\ &\qquad +d(x^3-6x^2+12x-8)\\ &= a+bx-2b+cx^2-4cx+4c\\ &\qquad +dx^3-6dx^2+12dx-8d\\ &= dx^3+(c-6d)x^2+(b-4c+12d)x\\ &\qquad +(a-2b+4c-8d)\end{aligned}$$

左辺の係数と比較して

$$\begin{cases} 6=d & \cdots① \\ c-6d=-16 & \cdots② \\ b-4c+12d=0 & \cdots③ \\ a-2b+4c-8d=-5 & \cdots④ \end{cases}$$

①を②に代入して

$c-36=-16$

よって，$c=20\cdots⑤$

①，⑤を③に代入して

$b-80+72=0$

よって，$b=8\cdots⑥$

①，⑤，⑥を④に代入して

$a-16+80-48=-5$

よって，$a=-21$

したがって

$\boldsymbol{a=-21,\ b=8,\ c=20,\ d=6}$

〔別解〕

$x-2=X$ とおくと，$x=X+2$

$6(X+2)^3-16(X+2)^2-5=a+bX+cX^2+dX^3$

左辺を X について昇べきの順に整理すると，

$$6(X^3+6X^2+12X+8)-16(X^2+4X+4)-5 = a+bX+cX^2+dX^3$$

$$-21+8X+20X^2+6X^3=a+bX+cX^2+dX^3$$

よって，$\boldsymbol{a=-21,\ b=8,\ c=20,\ d=6}$

練習問題 1-B

1. (1) $x^2=X$ とおくと

$3X^2+10X-8=0$

$(3X-2)(X+4)=0$

$(3x^2-2)(x^2+4)=0$

$3x^2-2=0$ より

$x^2=\dfrac{2}{3}$

$x=\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$x^2+4=0$ より

$x^2=-4$

$x=\pm\sqrt{-4}=\pm 2i$

よって，$\boldsymbol{x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3},\ \pm 2i}$

(2) $P(x)=2x^4+2x^3-13x^2+12x-3$ とおくと，$P(1)=0$ であるから，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ．

2	2	−13	12	−3	1
	2	4	−9	3	
2	4	−9	3	0	

$P(x)=(x-1)(2x^3+4x^2-9x+3)$

$Q(x)=2x^3+4x^2-9x+3$ とおくと

$Q(1)=0$ なので，$Q(x)$ は $x-1$ を因数にもつ．

2	4	−9	3	1
	2	6	−3	
2	6	−3	0	

$Q(x)=(x-1)(2x^2+6x-3)$ であるから

$P(x)=(x-1)^2(2x^2+6x-3)$

よって，$(x-1)^2(2x^2+6x-3)=0$

$(x-1)^2=0$ より，$x=1$（重解）

$2x^2+6x-3=0$ より

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-2\cdot(-3)}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{15}}{2}$$

よって，$\boldsymbol{x=1}$ **(重解)**，$\boldsymbol{\dfrac{-3\pm\sqrt{15}}{2}}$

(3) 両辺に $(x+5)(x-3)$ をかけると

$2(x+1)-(x-3)=x(x+5)$

$2x+2-x+3=x^2+5x$

$x^2+4x-5=0$

$(x+5)(x-1)=0$

よって，$x=-5,\ 1$

ここで，$x=-5$ は方程式の分母を 0 にするので無縁解である．　したがって，$\boldsymbol{x=1}$

(4) $2x-3=\pm(3x-2)$

i) $2x-3=3x-2$ のとき

$-x=1$

$x=-1$

ⅱ) $2x-3=-(3x-2)$ のとき

$2x-3=-3x+2$

$5x=-5$

$x=1$

よって，$\boldsymbol{x=\pm 1}$

（5） 両辺を 2 乗すると

$(\sqrt{x+5})^2=(\sqrt{x-3}+2)^2$

$x+5=(x-3)+4\sqrt{x-3}+4$

$4\sqrt{x-3}=4$

$\sqrt{x-3}=1$

両辺を 2 乗すると

$x-3=1$

$x=4$

これは，もとの方程式を満たすから

$\boldsymbol{x=4}$

2. （1） 2 つの式を、上から①，②とする．

①より，$y=2-x\cdots$①$'$

①$'$ を②に代入して，

$x^3+(2-x)^3=26$

$x^3+(8-12x+6x^2-x^3)=26$

$6x^2-12x-18=0$

$x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$

$x=-1,\ 3\cdots$③

③を ②$'$ に代入すると

$x=-1$ のとき，$y=3$

$x=3$ のとき，$y=-1$

よって，$\boldsymbol{(x,\ y)=(-1,\ 3),\ (3,\ -1)}$

（2） 2 つの式を、上から①，②とする．

②において，$\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{2}=k$ とおくと

$x=4k,\ y=3k,\ z=2k\cdots$②$'$

②$'$ を①に代入して，

$4k+2\cdot 3k+3\cdot 2k=10$

$4k+6k+6k=10$

$16k=10$

$k=\dfrac{5}{8}\cdots$③

③を ②$'$ に代入すると

$x=4\cdot\dfrac{5}{8}=\dfrac{5}{2}$

$y=3\cdot\dfrac{5}{8}=\dfrac{15}{8}$

$z=2\cdot\dfrac{5}{8}=\dfrac{5}{4}$

よって，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{15}{8},\ \dfrac{5}{4}\right)}$

3. 右辺を通分し，分子を x について整理すると

$$\begin{aligned}\text{右辺}&=\frac{a(x^2-x+1)}{x(x^2-x+1)}+\frac{(bx+c)x}{(x^2-x+1)x}\\&=\frac{ax^2-ax+a+bx^2+cx}{x(x^2-x+1)}\\&=\frac{(a+b)x^2+(-a+c)x+a}{x(x^2-x+1)}\end{aligned}$$

左辺の分子の係数と比較して，

$$\begin{cases}a+b=0\\-a+c=2\\a=-1\end{cases}$$

これを解いて，$\boldsymbol{a=-1,\ \ b=1,\ \ c=1}$

4. 整式 x^3+2x^2+ax+b を，$(x-1)^2$ で割ったときの商は 1 次式で，1 次の項の係数は 1 であるから，c を定数として，この商を $x+c$ とおくことができる．

よって

$x^3+2x^2+ax+b=(x-1)^2(x+c)$

は，x についての恒等式となる．

右辺を展開して，整理すると

$$\begin{aligned}\text{右辺}&=(x^2-2x+1)(x+c)\\&=x^3+cx^2-2x^2-2cx+x+c\\&=x^3+(c-2)x^2+(-2c+1)x+c\end{aligned}$$

よって

$x^3+2x^2+ax+b=x^3+(c-2)x^2+(-2c+1)x+c$

両辺の係数を比較して，

$$\begin{cases}2=c-2\\a=-2c+1\\b=c\end{cases}$$

これを解いて，$\boldsymbol{a=-7,\ \ b=4}$，$(c=4)$

5. $abc=1$ より，$c=\dfrac{1}{ab}$ であるから，これを証明すべき等式の左辺に代入すると

$$\begin{aligned}\text{左辺}&=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{\frac{b}{ab}+b+1}+\frac{\frac{1}{ab}}{\frac{a}{ab}+\frac{1}{ab}+1}\\&=\frac{a}{ab+a+1}+\frac{ab}{1+ab+a}+\frac{1}{a+1+ab}\\&=\frac{a+ab+1}{ab+a+1}\\&=1=\text{右辺}\end{aligned}$$

6. $\dfrac{x}{b-c}=\dfrac{y}{c-a}=\dfrac{z}{a-b}=k$ とおくと

$x=k(b-c),\ y=k(c-a),\ z=k(a-b)$

これらを $ax+by+cz$ に代入すると

$ax+by+cz$

$=a\cdot k(b-c)+b\cdot k(c-a)+c\cdot k(a-b)$

$=k\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}$

$=k(ab-ac+bc-ba+ca-cb)$

$=k\cdot 0=\mathbf{0}$

7. 直角をはさむ 2 辺の長さを，$x\,\mathrm{cm}$，$y\,\mathrm{cm}$ とすると，斜辺の長さは，$\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{cm}$ となる．

周囲の長さが $24\,\mathrm{cm}$ であるから，

$x+y+\sqrt{x^2+y^2}=24$

面積が $24\,\mathrm{cm}^2$ であるから，$\dfrac{1}{2}xy=24$

よって

$$\begin{cases} x+y+\sqrt{x^2+y^2}=24 & \cdots ① \\ xy=48 & \cdots ② \end{cases}$$

①より

$\sqrt{x^2+y^2}=24-x-y$

両辺を 2 乗すると

$x^2+y^2=(24-x-y)^2$

$x^2+y^2=24^2+x^2+y^2-2\cdot 24x+2xy-2\cdot 24y$

$24x-xy+24y-24\cdot 12=0$

②を代入すると

$24x-48+24y=24\cdot 12$

$24x-24\cdot 2+24y=24\cdot 12$

$x-2+y=12$

$x+y=14\cdots ③$

③より，$y=14-x\cdots ③'$

これを，②に代入して

$x(14-x)=48$

$x^2-14x+48=0$

$(x-6)(x-8)=0$

よって，$x=6$，8

③$'$ に代入して

$x=6$ のとき，$y=8$

$x=8$ のとき，$y=6$

これらは，①，②を満たす．

このとき，斜辺の長さはいずれの場合も

$\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{100}=10$

よって，3 辺の長さは，**6 cm，8 cm，10 cm**

∎