2章　ラプラス変換

BASIC

72　※ $\mathcal{L}\left[t^2\right]=\dfrac{2}{s^3}$　$(s>0)$ は既知とします.

$$\begin{aligned}F(s)&=\int_0^\infty e^{-st}\,t^3\,dt\\&=\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\,t^3\right]_0^\infty+\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\,3t^2\,dt\\&=\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\,t^3\right]_0^\infty+\frac{3}{s}\int_0^\infty e^{-st}\,t^2\,dt\end{aligned}$$

ここで，$s>0$ のとき

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}e^{-st}t^3&=\lim_{t\to\infty}\frac{t^3}{e^{st}}\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{(t^3)'}{(e^{st})'}=\lim_{t\to\infty}\frac{3t^2}{se^{st}}\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{(3t^2)'}{(se^{st})'}=\lim_{t\to\infty}\frac{6t}{s^2e^{st}}\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{(6t)'}{(s^2e^{st})'}=\lim_{t\to\infty}\frac{6}{s^3e^{st}}=0\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}F(s)&=0+\frac{3}{s}\int_0^\infty e^{-st}t^2\,dt\\&=\frac{3}{s}\mathcal{L}\left[t^2\right]\\&=\frac{3}{s}\cdot\frac{2}{s^3}=\frac{6}{s^4}\end{aligned}$$

したがって，$\boldsymbol{\mathcal{L}\left[t^3\right]=\dfrac{6}{s^4}}$　$(s>0)$

73　与式 $=\mathcal{L}\left[t^2\right]+\mathcal{L}\left[t^3\right]$

$$\begin{aligned}&=\frac{2}{s^3}+\frac{6}{s^4}\\&=\boldsymbol{\frac{2s+6}{s^4}}\quad(s>0)\end{aligned}$$

74　$\mathcal{L}\left[e^{\alpha t}\right]=\dfrac{1}{s-\alpha}$ であるから

与式 $=\mathcal{L}\left[e^{3t}\right]-\mathcal{L}\left[e^{-2t}\right]$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{s-3}-\frac{1}{s+2}\\&=\frac{(s+2)-(s-3)}{(s-3)(s+2)}\\&=\boldsymbol{\frac{5}{(s-3)(s+2)}}\quad(s>3)\end{aligned}$$

75（1）　※ $s>0$ のとき，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}e^{-st}\sin 2t=\lim_{t\to\infty}e^{-st}\cos 2t=0$

$\displaystyle\mathcal{L}\left[\sin 2t\right]=\int_0^\infty e^{-st}\,\sin 2t\,dt=F(s)$ とおく.

$$\begin{aligned}F(s)&=\int_0^\infty e^{-st}\,\sin 2t\,dt\\&=\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\sin 2t\right]_0^\infty+\frac{2}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cos 2t\\&=0+\frac{2}{s}\left\{\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\cos 2t\right]_0^\infty-\frac{2}{s}\int_0^\infty e^{-st}\sin 2t\right\}\\&=\frac{2}{s}\left(\frac{1}{s}-\frac{2}{s}F(s)\right)\end{aligned}$$

よって，$F(s)=\dfrac{2}{s^2}-\dfrac{4}{s^2}F(s)$ であるから

$$\left(1+\frac{4}{s^2}\right)F(s)=\frac{2}{s^2}$$

$$\frac{s^2+4}{s^2}F(s)=\frac{2}{s^2}$$

したがって，$F(s)=\dfrac{2}{s^2}\cdot\dfrac{s^2}{s^2+4}=\dfrac{2}{s^2+4}$

以上より，$\mathcal{L}\left[\sin 2t\right]=\dfrac{2}{s^2+4}$　$(s>0)$

〔別解〕

$$\begin{aligned}F(s)&=\int_0^\infty e^{-st}\,\sin 2t\,dt\\&=\left[\frac{1}{2}e^{-st}\cos 2t\right]_0^\infty+\frac{s}{2}\int_0^\infty e^{-st}\cos 2t\\&=\frac{1}{2}+\frac{s}{2}\left\{\left[-\frac{1}{2}e^{-st}\sin 2t\right]_0^\infty-\frac{s}{2}\int_0^\infty e^{-st}\sin 2t\right\}\\&=\frac{1}{2}+\frac{s}{2}\left(0-\frac{s}{2}F(s)\right)\\&=\frac{1}{2}-\frac{s^2}{4}F(s)\end{aligned}$$

よって，$F(s)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{s^2}{4}F(s)$ であるから

$$\left(1+\frac{s^2}{4}\right)F(s)=\frac{1}{2}$$

$$\frac{4+s^2}{4}F(s)=\frac{1}{2}$$

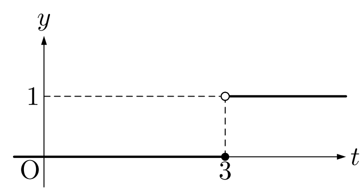
したがって，$F(s)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{s^2+4}=\dfrac{2}{s^2+4}$

以上より，$\mathcal{L}\left[\sin 2t\right]=\dfrac{2}{s^2+4}$　$(s>0)$

（2）　左辺 $=\mathcal{L}\left[\dfrac{e^{2t}+e^{-2t}}{2}\right]$

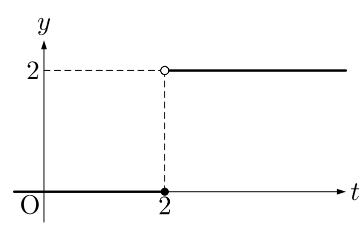
$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}\mathcal{L}\left[e^{2t}+e^{-2t}\right]\\&=\frac{1}{2}\{\mathcal{L}\left[e^{2t}\right]+\mathcal{L}\left[e^{-2t}\right]\}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-2}+\frac{1}{s+2}\right)\quad(s>2)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{(s+2)+(s-2)}{(s-2)(s+2)}\\&=\frac{2s}{2(s^2-4)}=\frac{s}{s^2-4}=\text{右辺}\end{aligned}$$

76（1）



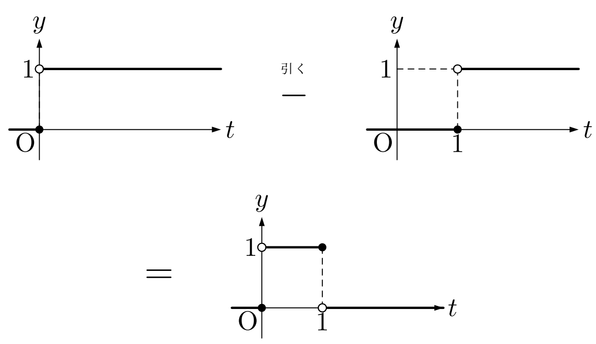
$\mathcal{L}\left[y\right]=\mathcal{L}\left[U(t-3)\right]=\boldsymbol{\dfrac{e^{-3t}}{s}}$　$(s>0)$

（2）

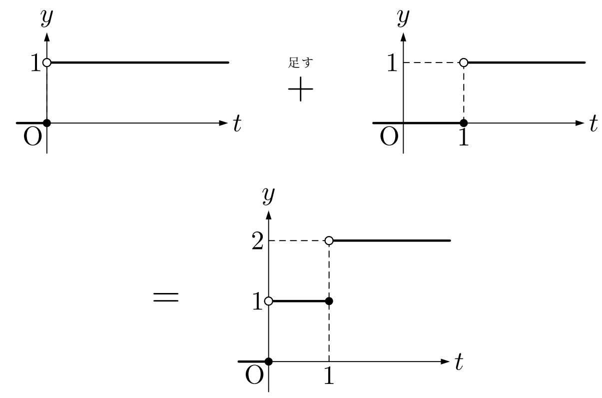


$\mathcal{L}\left[y\right]=2\mathcal{L}\left[U(t-2)\right]=\boldsymbol{\dfrac{2e^{-2t}}{s}}$　$(s>0)$

（3）



（4）



77（1）$f(t)=U(t)-U(t-2)\quad(t>0)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[f(t)\right]&=\mathcal{L}\left[U(t)-U(t-2)\right]\\&=\mathcal{L}\left[U(t)\right]-\mathcal{L}\left[U(t-2)\right]\\&=\frac{1}{s}-\frac{e^{-2s}}{s}\\&=\boldsymbol{\frac{1-e^{-2s}}{s}}\quad(s>0)\end{aligned}$$

（2）$f(t)=2U(t-3)\quad(t>0)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[f(t)\right]&=\mathcal{L}\left[2U(t-3)\right]\\&=2\mathcal{L}\left[U(t-3)\right]\\&=2\cdot\frac{e^{-3s}}{s}\\&=\boldsymbol{\frac{2e^{-3s}}{s}}\quad(s>0)\end{aligned}$$

（3）$f(t)=U(t-2)+U(t-3)\quad(t>0)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[f(t)\right]&=\mathcal{L}\left[U(t-2)+U(t-3)\right]\\&=\mathcal{L}\left[U(t-2)\right]+\mathcal{L}\left[U(t-3)\right]\\&=\frac{e^{-2s}}{s}+\frac{e^{-3s}}{s}\\&=\boldsymbol{\frac{e^{-2s}+e^{-3s}}{s}}\quad(s>0)\end{aligned}$$

（4）$f(t)=U(t)-U(t-2)+U(t-3)\quad(t>0)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[f(t)\right]&=\mathcal{L}\left[U(t)-U(t-2)+U(t-3)\right]\\&=\mathcal{L}\left[U(t)\right]-\mathcal{L}\left[U(t-2)\right]+\mathcal{L}\left[U(t-3)\right]\\&=\frac{1}{s}-\frac{e^{-2s}}{s}+\frac{e^{-3s}}{s}\\&=\boldsymbol{\frac{1-e^{-2s}+e^{-3s}}{s}}\quad(s>0)\end{aligned}$$

78 i）$\omega>0$ のとき

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\sinh\omega t\right]&=\frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{\left(\dfrac{s}{\omega}\right)^2-1}\\&=\frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{\dfrac{s^2}{\omega^2}-1}\\&=\frac{1}{\dfrac{s^2}{\omega}-\omega}=\frac{\omega}{s^2-\omega^2}\end{aligned}$$

ii）$\omega<0$ のとき，$\sinh\omega t=-\sinh(-\omega t)$ で，このとき，$-\omega>0$ であるから

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\sinh\omega t\right]&=\mathcal{L}\left[-\sinh(-\omega t)\right]\\&=-\mathcal{L}\left[\sinh(-\omega t)\right]\\&=-\left(\frac{1}{-\omega}\right)\cdot\frac{1}{\left(\dfrac{s}{-\omega}\right)^2-1}\\&=\frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{\dfrac{s^2}{\omega^2}-1}\\&=\frac{1}{\dfrac{s^2}{\omega}-\omega}=\frac{\omega}{s^2-\omega^2}\end{aligned}$$

以上より，$\omega\neq 0$ のとき，$\mathcal{L}\left[\sinh\omega t\right]=\boldsymbol{\dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}}$

79　$\mathcal{L}\left[\sin t\right]=\dfrac{1}{s^2+1}$ であるから

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\sin t\,\cos t\right]&=\mathcal{L}\left[\frac{\sin 2t}{2}\right]\\&=\frac{1}{2}\mathcal{L}\left[\sin 2t\right]\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(\dfrac{s}{2}\right)^2+1}\\&=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\dfrac{s^2}{4}+1}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{s^4+4}}\end{aligned}$$

80　$\mathcal{L}\left[t^2\right]=\dfrac{2}{s^3}$ であるから，像関数の移動法則をを用いて

与式 $=\boldsymbol{\dfrac{2}{(s-\alpha)^3}}$

81　$\mathcal{L}\left[\cos t\right]=\dfrac{s}{s^2+1}$ であるから，原関数の移動法則を用いて

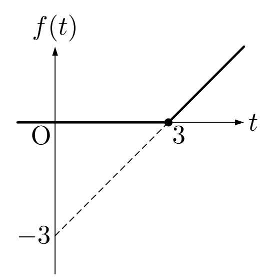
与式 $=e^{-\frac{\pi}{3}s}\cdot\dfrac{s}{s^2+1}$

$=\boldsymbol{\dfrac{se^{-\frac{\pi}{3}s}}{s^2+1}}$

82 i）　$t\leqq 3$ のとき，$f(t)=(t-3)\cdot 0=0$

ii）　$t>3$ のとき，$f(t)=(t-3)\cdot 1=t-3$

よって，グラフは次のようになる．



また，$\mathcal{L}\left[t\right]=\dfrac{1}{s^2}$ であるから，原関数の移動法則より

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[f(t)\right]&=e^{-3s}\cdot\frac{1}{s^2}\\&=\boldsymbol{\frac{e^{-3s}}{s^2}}\end{aligned}$$

83 $f(t)=\sinh t$ とおくと，$F(s)=\mathcal{L}\left[f(t)\right]=\dfrac{1}{s^2-1}$

これより，$F'(s)=-\dfrac{2s}{(s^2-1)^2}$

よって，像関数の微分法則より

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[t\sinh t\right]&=\mathcal{L}\left[t\,f(t)\right]\\&=-F'(s)\\&=-\left\{-\frac{2s}{(s^2-1)^2}\right\}\\&=\boldsymbol{\frac{2s}{(s^2-1)^2}}\end{aligned}$$

$f(t)=\cosh t$ とおくと，$F(s)=\mathcal{L}\left[f(t)\right]=\dfrac{s}{s^2-1}$

これより，$F'(s) = \dfrac{(s^2-1) - s\cdot 2s}{(s^2-1)^2} = -\dfrac{s^2+1}{(s^2-1)^2}$

よって，像関数の微分法則より

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[t\cosh t\right] &= \mathcal{L}\left[t\,f(t)\right]\\ &= -F'(s)\\ &= -\left\{-\frac{s^2+1}{(s^2-1)^2}\right\}\\ &= \boldsymbol{\frac{s^2+1}{(s^2-1)^2}}\end{aligned}$$

84　$F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right]$ とおき，$f'(t) + 3f(t) = t^2$ の両辺のラプラス変換をつくると

$$\mathcal{L}\left[f'(t) + 3f(t)\right] = \mathcal{L}\left[t^2\right]$$

$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right] + 2\mathcal{L}\left[f(t)\right] = \frac{2}{s^3}$$

原関数の微分法則を用いると

$$sF(s) - f(0) + 3\mathcal{L}\left[f(t)\right] = \frac{2}{s^3}$$

$f(0) = 0,\ \ F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right]$ であるから

$$s\mathcal{L}\left[f(t)\right] - 0 + 3\mathcal{L}\left[f(t)\right] = \frac{2}{s^3}$$

$$(s+3)\mathcal{L}\left[f(t)\right] = \frac{2}{s^3}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{L}\left[f(t)\right] = \frac{2}{s^3(s+3)}}$$

85　$f(t) = e^{2t}$ とおくと，$F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right] = \dfrac{1}{s-2}$

これより

$$F'(s) = -\frac{1}{(s-2)^2}$$

$$F''(s) = \frac{2(s-2)}{(s-2)^4} = \frac{2}{(s-2)^3}$$

$$F'''(s) = -\frac{2\cdot 3(s-2)^2}{(s-2)^6} = -\frac{3\cdot 2}{(s-2)^4}$$

よって，$F^{(n)}(s) = (-1)^n \dfrac{n\,!}{(s-2)^{n+1}}$

※ 数学的帰納法による証明略

像関数の高次微分法則を用いて

$$\begin{aligned}\text{与式} &= (-1)^n\cdot(-1)^n\,\frac{n\,!}{(s-2)^{n+1}}\\ &= \boldsymbol{\frac{n\,!}{(s-2)^{n+1}}}\end{aligned}$$

86　$\mathcal{L}\left[e^{3t} - e^{t}\right] = \dfrac{1}{s-3} - \dfrac{1}{s-1}$　　$(s > 3)$ であるから，像関数の積分法則を用いて

$$\begin{aligned}\text{与式} &= \int_s^{\infty}\left(\frac{1}{\sigma-3} - \frac{1}{\sigma-1}\right)d\sigma\\ &= \Big[\log|\sigma-3| - \log|\sigma-1|\Big]_s^{\infty}\\ &= \left[\log\left|\frac{\sigma-3}{\sigma-1}\right|\right]_s^{\infty}\\ &= 0 - \log\left|\frac{s-3}{s-1}\right| \quad ※\\ &= \log\left|\frac{s-3}{s-1}\right|^{-1}\\ &= \log\left|\frac{s-1}{s-3}\right| = \boldsymbol{\log\frac{s-1}{s-3}} \quad (s > 3\ \text{より})\end{aligned}$$

※　$\displaystyle\lim_{\sigma\to\infty}\log\left|\frac{\sigma-3}{\sigma-1}\right| = \lim_{\sigma\to\infty}\log\left|\frac{1-\dfrac{3}{\sigma}}{1-\dfrac{1}{\sigma}}\right| = \log 1 = 0$

87（1）

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-4s+4}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2}\right] = \boldsymbol{te^{2t}}$$

（2）

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2-5s+6}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-3)(s-2)}\right]$$

ここで，$\dfrac{1}{(s-3)(s-2)} = \dfrac{a}{s-3} + \dfrac{b}{s-2}$ とおき，両辺に $(s-3)(s-2)$ をかけると

$$1 = a(s-2) + b(s-3)$$

$$1 = (a+b)s + (-2a-3b)$$

これが s についての恒等式となるためには

$$\begin{cases} a+b = 0\\ -2a-3b = 1\end{cases}$$

これを解いて，$a = 1,\ b = -1$

よって

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-3)(s-2)}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3} - \frac{1}{s-2}\right]\\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]\\ &= \boldsymbol{e^{3t} - e^{2t}}\end{aligned}$$

（3）

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+2s+5}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)^2-1+5}\right]\\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)^2+4}\right]\\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s+1)^2+2^2}\right]\\ &= \boldsymbol{e^{-t}\sin 2t}\end{aligned}$$

88（1）

$$\frac{s-1}{s^2+6s+9} = \frac{s-1}{(s+3)^2}$$

ここで，$\dfrac{s-1}{(s+3)^2} = \dfrac{a}{s+3} + \dfrac{b}{(s+3)^2}$ とおき，両辺に $(s+3)^2$ をかけると

$$s-1 = a(s+3) + b$$

$$s-1 = as + (3a+b)$$

これが s についての恒等式となるためには

$$\begin{cases} a = 1\\ 3a+b = -1\end{cases}$$

これを解いて，$a = 1,\ b = -4$

よって，$\dfrac{s-1}{(s+3)^2} = \dfrac{1}{s+3} - \dfrac{4}{(s-3)^2}$

したがって

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-1}{s^2+6s+9}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3} + \frac{4}{(s+3)^2}\right]\\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right] + 4\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+3)^2}\right]\\ &= e^{-3t} - 4te^{-3t}\\ &= \boldsymbol{(1-4t)e^{-3t}}\end{aligned}$$

（2）

$$\begin{aligned}\frac{s-2}{s^2-6s+13} &= \frac{s-2}{(s-3)^2-9+13}\\ &= \frac{s-2}{(s-3)^2-4}\\ &= \frac{s-3+1}{(s-3)^2-2^2}\\ &= \frac{s-3}{(s-3)^2-2^2} + \frac{1}{(s-3)^2-2^2}\\ &= \frac{s-3}{(s-3)^2-2^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(s-3)^2-2^2}\end{aligned}$$

したがって

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-2}{s^2-6s+13}\right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-3}{(s-3)^2-2^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(s-3)^2-2^2}\right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-3}{(s-3)^2-2^2}\right] + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s-3)^2-2^2}\right]$$

$$= e^{3t}\cos 2t + \frac{1}{2}e^{3t}\sin 2t$$

$$= \boldsymbol{e^{3t}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)}$$

89（1）$\dfrac{-s+5}{(s+1)(s-1)(s-2)} = \dfrac{a}{s+1} + \dfrac{b}{s-1} + \dfrac{c}{s-2}$ とおき，両辺に $(s+1)(s-1)(s-2)$ をかけると

$-s+5 = a(s-1)(s-2) + b(s+1)(s-2) + c(s+1)(s-1)$

これが s についての恒等式になるから，$s=-1$ を代入して

$$-(-1)+5 = a(-1-1)(-1-2) + 0b + 0c$$

よって，$6 = 6a$ となるから，$a = 1$

$s=1$ を代入して

$$-1+5 = 0a + b(1+1)(1-2) + 0c$$

よって，$4 = -2b$ となるから，$b = -2$

$s=2$ を代入して

$$-2+5 = 0a + 0b + c(2+1)(2-1)$$

よって，$3 = 3c$ となるから，$c = 1$

逆に，$a=1$，$b=-2$，$c=1$ のとき，等式は成り立つ．

以上より

$$\frac{-s+5}{(s+1)(s-1)(s-2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s-2}$$

したがって

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-s+5}{(s+1)(s-1)(s-2)}\right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1} - \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s-2}\right]$$

$$\boldsymbol{= e^{-t} - 2e^{t} + e^{2t}}$$

（2）$\dfrac{9s}{(s+1)^2(s-2)} = \dfrac{a}{s+1} + \dfrac{b}{(s+1)^2} + \dfrac{c}{s-2}$ とおき，両辺に $(s+1)^2(s-2)$ をかけると

$9s = a(s+1)(s-2) + b(s-2) + c(s+1)^2$

これが s についての恒等式になるから，$s=-1$ を代入して

$$9\cdot(-1) = 0a + b(-1-2) + 0c$$

よって，$-9 = -3b$ となるから，$b = 3$

$s=2$ を代入して

$$9\cdot 2 = 0a + 0b + c(2+1)^2$$

よって，$18 = 9c$ となるから，$c = 2$

$s=0$ を代入して

$$9\cdot 0 = a(0+1)(0-2)a + b(0-2) + c(0+1)^2$$

よって，$0 = -2a - 2b + c$ となるから，これに $b=3$，$c=2$ を代入して，$a=-2$

逆に，$a=-2$，$b=3$，$c=2$ のとき，等式は成り立つ．

以上より

$$\frac{9s}{(s+1)^2(s-2)} = -\frac{2}{s+1} + \frac{3}{(s+1)^2} + \frac{2}{s-2}$$

したがって

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{9s}{(s+1)^2(s-2)}\right]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1} - \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s-2}\right]$$

$$\boldsymbol{= e^{-t} - 2e^{t} + e^{2t}}$$