練習問題 1

1.

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$より，$\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$となるから

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=-(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{b}\\&=\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\\&=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\\&=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\\&=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\end{aligned}$$

また，$\boldsymbol{c}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}&=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}\\&=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\\&=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\\&=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\\&=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

以上より，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$となる．

2.

（1）

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}b_2&b_3\\c_2&c_3\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}b_1&b_3\\c_1&c_3\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}b_1&b_2\\c_1&c_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}\\&=(b_2c_3-b_3c_2)\boldsymbol{i}-(b_1c_3-b_3c_1)\boldsymbol{j}+(b_1c_2-b_2c_1)\boldsymbol{k}\\&=(b_2c_3-b_3c_2,\quad b_3c_1-b_1c_3,\quad b_1c_2-b_2c_1)\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})&=(a_1,\quad a_2,\quad a_3)\\&\qquad\cdot(b_2c_3-b_3c_2,\quad b_3c_1-b_1c_3,\quad b_1c_2-b_2c_1)\\&=a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}&=\begin{vmatrix}b_2&b_3\\c_2&c_3\end{vmatrix}a_1-\begin{vmatrix}b_1&b_3\\c_1&c_3\end{vmatrix}a_2+\begin{vmatrix}b_1&b_2\\c_1&c_2\end{vmatrix}a_3\\&=(b_2c_3-b_3c_2)a_1-(b_1c_3-b_3c_1)a_2+(b_1c_2-b_2c_1)a_3\\&=a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)\end{aligned}$$

したがって，

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$$

（2）

（1）のように行列式に変形させて展開すると，

$$\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\begin{vmatrix}b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\\a_1&a_2&a_3\end{vmatrix}$$　※第 3 行について展開

$$\begin{aligned}&=\begin{vmatrix}b_2&b_3\\c_2&c_3\end{vmatrix}a_1-\begin{vmatrix}b_1&b_3\\c_1&c_3\end{vmatrix}a_2+\begin{vmatrix}b_1&b_2\\c_1&c_2\end{vmatrix}a_3\\&=(b_2c_3-b_3c_2)a_1-(b_1c_3-b_3c_1)a_2+(b_1c_2-b_2c_1)a_3\\&=a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\begin{vmatrix}c_1&c_2&c_3\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}$$　※第 2 行について展開

$$\begin{aligned}&=-\begin{vmatrix}c_2&c_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}a_1+\begin{vmatrix}c_1&c_3\\b_1&b_3\end{vmatrix}a_2-\begin{vmatrix}c_1&c_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}a_3\\&=-(c_2b_3-c_3b_2)a_1+(c_1b_3-c_3b_1)a_2-(c_1b_2-c_2b_1)a_3\\&=a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)\end{aligned}$$

したがって，

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$$

3.

（1）

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\quad 2,\quad 3)-(0,\quad 1,\quad 2)=(-1,\quad 1,\quad 1)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(2,\quad -2,\quad 2)-(0,\quad 1,\quad 2)=(2,\quad -3,\quad 0)$$

となるから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-1&1&1\\2&-3&0\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}1&1\\-3&0\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}-1&1\\2&0\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}-1&1\\2&-3\end{vmatrix}\boldsymbol{k}\\&=(0+3)\boldsymbol{i}-(0-2)\boldsymbol{j}+(3-2)\boldsymbol{k}\\&=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+=(3,\quad 2,\quad 1)\end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned}S&=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\\&=\sqrt{3^2+2^2+1^1}\\&=\sqrt{9+4+1}\\&=\sqrt{\boldsymbol{14}}\end{aligned}$$

（2）

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}$は$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$に垂直なベクトルなので，

この単位ベクトルを求めればよい．

よって，

$$\pm\frac{1}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=\pm\frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{14}}}(\boldsymbol{3},\quad\boldsymbol{2},\quad\boldsymbol{1})$$

4.

（１）接線ベクトルは,

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = (e^t,\quad -e^{-t},\quad \sqrt{2})$$

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| = \sqrt{(e^t)^2 + (-e^{-t})^2 + (\sqrt{2})^2}$$
$$= \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2}$$
$$= \sqrt{(e^t + e^{-t})^2}$$
$$= e^t + e^{-t}$$

したがって, 求める単位接線ベクトル$\boldsymbol{t}$は,

$$\boldsymbol{t} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{e^t + e^{-t}}}(\boldsymbol{e^t},\quad \boldsymbol{-e^{-t}},\quad \boldsymbol{\sqrt{2}})$$

（２）曲線の長さをsとする.

$$s = \int_0^1 \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| dt$$
$$= \int_0^1 (e^t + e^{-t})dt$$
$$= [e^t - e^{-t}]_0^1$$
$$= (e^1 - e^{-1}) - (e^0 - e^0)$$
$$= e - \frac{1}{e} - 0$$
$$= \boldsymbol{e - \frac{1}{e}}$$

5. 曲線の長さをsとする.

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = (2,\quad 2\sqrt{3}t,\quad 3t^2)$$

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3}t)^2 + (3t^2)^2}$$
$$= \sqrt{4 + 12t^2 + 9t^4}$$
$$= \sqrt{(3t^2 + 2)^2}$$
$$= 3t^2 + 2$$

よって,

$$s = \int_0^3 \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| dt$$
$$= \int_0^3 (3t^2 + 2)dt$$
$$= [t^3 + 2t]_0^3$$
$$= 3^3 + 2\cdot 3$$
$$= 27 + 6$$
$$= \mathbf{33}$$

6.

（１）

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = (-a\sin u \sin v,\quad a\cos u \sin v,\quad 0)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = (a\cos u\cos v,\quad a\sin u\cos v,\quad -a\sin v)\text{より}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -a\sin u\sin v & a\cos u\sin v & 0 \\ a\cos u\cos v & a\sin u\cos v & -a\sin v \end{vmatrix}$$
$$= a^2\sin v\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ \cos u\cos v & \sin u\cos v & -\sin v \end{vmatrix}$$
$$= a^2\sin v\left(\begin{vmatrix} \cos u & 0 \\ \sin u\cos v & -\sin v \end{vmatrix}\boldsymbol{i}\right.$$
$$-\begin{vmatrix} -\sin u & 0 \\ \cos u\cos v & -\sin v \end{vmatrix}\boldsymbol{j}$$
$$\left.+\begin{vmatrix} -\sin u & \cos u \\ \cos u\cos v & \sin u\cos v \end{vmatrix}\boldsymbol{k}\right)$$
$$= a^2\sin v\{(-\cos u\sin v - 0)\boldsymbol{i} - (\sin u\sin v - 0)\boldsymbol{j}$$
$$+ (-\sin^2 u\cos v - \cos^2 u\cos v)\boldsymbol{k}\}$$
$$= a^2\sin v\{-\cos u\sin v\,\boldsymbol{i} - \sin u\sin v\,\boldsymbol{j}$$
$$+ (-\cos v)(\sin^2 u + \cos^2 u)\boldsymbol{k}\}$$
$$= -a^2\sin v\,(\cos u\sin v,\quad \sin u\sin v,\quad \cos v)$$

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|^2 = (-a^2\sin v)^2\{(\cos u\sin v)^2$$
$$+(\sin u\sin v)^2 + \cos^2 v\}$$
$$= (a^4\sin^2 v)(\cos^2 u\sin^2 v + \sin^2 u\sin^2 v + \cos^2 v)$$
$$= (a^2\sin v)^2\{\sin^2 v\,(\cos^2 u + \sin^2 u) + \cos^2 v\}$$
$$= (a^2\sin v)^2(\sin^2 v + \cos^2 v)$$
$$= (a^2\sin v)^2$$

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| = \sqrt{(a^2\sin v)^2} = a^2\sin v$$

よって, 求める単位法線ベクトルは,

$$\pm\frac{1}{a^2\sin v}\{-a^2\sin v\,(\cos u\sin v,\quad \sin u\sin v,\quad \cos v)\}$$
$$= \pm(\boldsymbol{\cos u\sin v},\quad \boldsymbol{\sin u\sin v},\quad \boldsymbol{\cos v})$$

（２）

$$S = \iint_D \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right| dudv$$
$$= \iint_D a^2\sin v\,dudv$$
$$= a^2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin v\,du\right)dv$$

$$= a^2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} [u \sin v]_0^{\frac{\pi}{2}} dv$$

$$= a^2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} \sin v\right) dv$$

$$= \frac{\pi}{2} a^2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} [-\cos v]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} a^2 \left(-\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} a^2 \left(0 + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \boldsymbol{\frac{\pi}{4} a^2}$$