1章　ベクトル解析

§1　ベクトル関数(p.1～p.16)

問1

（1）与式$= (1,\ 2,\ 3) - 3(-2,\ 3,\ 1)$

$= (1,\ 2,\ 3) - (-6,\ 9,\ 3)$

$= (1+6,\ 2-9,\ 3-3)$

$= (\mathbf{7},\ \mathbf{-7},\ \mathbf{0})$

（2）$|\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|^2 = 7^2 + (-7)^2 + 0^2 = 49 + 49 = 98$

$|\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}| = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$

よって，求めるベクトルは，

$$\pm\frac{1}{7\sqrt{2}}(7,\ -7,\ 0) = \pm\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}(\mathbf{1},\ \mathbf{-1},\ \mathbf{0})$$

問2

$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 2\cdot 3 + k\cdot(-1) + (-1)\cdot 3$

$= 6 - k - 3 = 3 - k$

$|\boldsymbol{b}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 3^2}$

$= \sqrt{9+1+9} = \sqrt{19}$

よって，求める正射影の大きさは，

$$\frac{|\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|} = \frac{|3-k|}{\sqrt{19}} = \frac{|\boldsymbol{k}-\mathbf{3}|}{\sqrt{\mathbf{19}}}$$

また，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$となるのは，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$のときであるから，

$3 - k = 0$より，$\boldsymbol{k} = \mathbf{3}$

問3

$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i} = -(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}) = -\boldsymbol{k}$

$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} = \mathbf{0}$

$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}$

$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$

$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j} = -(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}) = -\boldsymbol{i}$

$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k} = \mathbf{0}$

問4

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

$= (0+2)\boldsymbol{i} - (0-0)\boldsymbol{j} + (1-0)\boldsymbol{k}$

$= 2\boldsymbol{i} - 0\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

$= (\mathbf{2},\ \mathbf{0},\ \mathbf{1})$

問5

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (1,\ -1,\ 2) - (2,\ 1,\ 3)$

$= (-1,\ -2,\ -1)$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (2,\ 2,\ 1) - (2,\ 1,\ 3)$

$= (0,\ 1,\ -2)$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

$= (4+1)\boldsymbol{i} - (2-0)\boldsymbol{j} + (-1-0)\boldsymbol{k}$

$= 5\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$

$= (\mathbf{5},\ \mathbf{-2},\ \mathbf{-1})$

三角形の面積は平行四辺形の面積の半分だから，

$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\times\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{5^2 + (-2)^2 + (-1)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{25+4+1}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{30} = \frac{\sqrt{\mathbf{30}}}{\mathbf{2}}$$

問6

$(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})\times\boldsymbol{j} = \mathbf{0}\times\boldsymbol{j} = \mathbf{0}$

$\boldsymbol{i}\times(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k} = -(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}) = -\boldsymbol{j}$

問7

（1）$\boldsymbol{a}'(t) = \left(\boldsymbol{e^t},\ \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{t}},\ \mathbf{1}\right)$

$t = 1$における微分係数は，

$\boldsymbol{a}'(1) = \left(e^1,\ \frac{1}{1},\ 1\right)$

$= (\boldsymbol{e},\ \mathbf{1},\ \mathbf{1})$

（2）$\boldsymbol{b}'(t) = (-\cos 2\pi t\cdot 2\pi,\ -\sin\pi t\cdot\pi,\ 1)$

$= (\boldsymbol{-2\pi\cos 2\pi t},\ \boldsymbol{-\pi\sin\pi t},\ \mathbf{1})$

$t = 1$における微分係数は，

$\boldsymbol{b}'(1) = (-2\pi\cos 2\pi,\ -\pi\sin\pi,\ 1)$

$= (\boldsymbol{-2\pi},\ \mathbf{0},\ \mathbf{1})$

問 8

$$\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}=(-\sin t,\quad \cos t,\quad 0)$$

よって,

$$\left|\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\right|=\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+0^2}$$

$$=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}$$

$$=\sqrt{1}=\mathbf{1}$$

問 9

$\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{b}$の成分表示を,それぞれ

$\boldsymbol{a}=(a_x,\quad a_y,\quad a_z)$, $\boldsymbol{b}=(b_x,\quad b_y,\quad b_z)$とする.

左辺$=\left(a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\right)'$

$$=(a_xb_x)'+\left(a_yb_y\right)'+(a_zb_z)'$$

$$=a_x{}'b_x+a_xb_x{}'+a_y{}'b_y+a_yb_y{}'+a_z{}'b_z+a_zb_z{}'$$

$$=\left(a_x{}'b_x+a_y{}'b_y+a_z{}'b_z\right)+\left(a_xb_x{}'+a_yb_y{}'+a_zb_z{}'\right)$$

$=\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}'$ =右辺

問 10

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=(1+2t,\quad 2t,\quad 1-2t)$$

これより,

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|=\sqrt{(1+2t)^2+(2t)^2+(1-2t)^2}$$

$$=\sqrt{1+4t+4t^2+4t^2+1-4t+4t^2}$$

$$=\sqrt{2+12t^2}$$

よって,

$$\boldsymbol{t}=\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2+12}\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}}}}(\mathbf{1+2}\boldsymbol{t},\quad \mathbf{2}\boldsymbol{t},\quad \mathbf{1-2}\boldsymbol{t})$$

問 11　曲線の長さをsとする.

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=(-\sin t,\quad \cos t,\quad 1)$$

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|=\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+1^2}$$

$$=\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+1}$$

$$=\sqrt{2}$$

$$s=\int_0^{2\pi}\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{2}dt$$

$$=\sqrt{2}[t]_0^{2\pi}$$

$$=\sqrt{2}\cdot 2\pi$$

$$=\mathbf{2\sqrt{2}}\boldsymbol{\pi}$$

問 12　単位法線ベクトルを$\boldsymbol{n}$とする.

（1）$\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}=(2,\quad 0,\quad 2u)$,　$\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}=(0,\quad 3,\quad 2v)$

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&0&2u\\0&3&2v\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0&2u\\3&2v\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}2&2u\\0&2v\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}2&0\\0&3\end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

$$=(0-6u)\boldsymbol{i}-(4v-0)\boldsymbol{j}+(6-0)\boldsymbol{k}$$

$$=-6u\boldsymbol{i}-4v\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$$

$$=(-6u,\quad -4v,\quad 6)$$

また,

$$\left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right|=\sqrt{(-6u)^2+(-4v)^2+6^2}$$

$$=\sqrt{36u^2+16v^2+36}$$

$$=\sqrt{4(9u^2+4v^2+9)}$$

$$=2\sqrt{9u^2+4v^2+9}$$

よって,

$$\boldsymbol{n}=\pm\frac{1}{2\sqrt{9u^2+4v^2+9}}(-6u,\quad -4v,\quad 6)$$

$$=\pm\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{9}\boldsymbol{u}^{\mathbf{2}}+\mathbf{4}\boldsymbol{v}^{\mathbf{2}}+\mathbf{9}}}(\mathbf{3}\boldsymbol{u},\quad \mathbf{2}\boldsymbol{v},\quad \mathbf{-3})$$

（2）$\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}=(\cos v,\quad \sin v,\quad 0)$

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}=(-u\sin v,\quad u\cos v,\quad 1)$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\cos v&\sin v&0\\-u\sin v&u\cos v&1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\sin v&0\\u\cos v&1\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}\cos v&0\\-u\sin v&1\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}\cos v&\sin v\\-u\sin v&u\cos v\end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

$$=(\sin v-0)\boldsymbol{i}-(\cos v-0)\boldsymbol{j}+(u\cos^2 v+u\sin^2 v)\boldsymbol{k}$$

$$=\sin v\,\boldsymbol{i}-\cos v\,\boldsymbol{j}+u\boldsymbol{k}$$

$$=(\sin v,\quad -\cos v,\quad u)$$

また,

$$\left|\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}\right|=\sqrt{(\sin v)^2+(-\cos v)^2+u^2}$$

$$=\sqrt{\sin^2 v+\cos^2 v+u^2}$$

$$=\sqrt{u^2+1}$$

よって,

$$\boldsymbol{n}=\pm\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\boldsymbol{u}^{\mathbf{2}}+\mathbf{1}}}(\mathbf{sin}\,\boldsymbol{v},\quad -\mathbf{cos}\,\boldsymbol{v},\quad \boldsymbol{u})$$

問 13

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = (-\sin u, \quad \cos u, \quad 0), \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = (0, \quad 0, \quad 1)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} -\sin u & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} -\sin u & \cos u \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \boldsymbol{k}$$

$$= (\cos u - 0)\boldsymbol{i} - (-\sin u - 0)\boldsymbol{j} + (0 - 0)\boldsymbol{k}$$

$$= \cos u \, \boldsymbol{i} + \sin u \, \boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}$$

$$= (\cos u, \quad \sin u, \quad 0)$$

$$\left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right| = \sqrt{\cos^2 u + \sin^2 u + 0^2}$$

$$= \sqrt{1} = 1$$

よって，

$$S = \iint_D \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right| du dv$$

$$= \iint_D 1 \cdot du dv$$

$$= \int_0^2 \left(\int_0^\pi du \right) dv$$

$$= \int_0^2 ([u]_0^\pi) dv$$

$$= \int_0^2 \pi dv$$

$$= \pi [v]_0^2$$

$$= \pi \cdot 2 = \boldsymbol{2\pi}$$