110 (1) 確率分布は,

$$P(X=x)=\begin{cases}\dfrac{3}{7} & (x=2)\\[2mm] \dfrac{1}{7} & (x=3,\,5)\\[2mm] \dfrac{2}{7} & (x=7)\end{cases}$$

これをもとに確率分布表を作成すると

x	2	3	5	7	計
$P(X=x)$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	1

(2) Y のとりうる値は, $Y=0,\,1,\,2$ である.
1 個のさいころを投げるとき 5 以上の目が出る確率は $p=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$ だから, 反復試行の確率公式を用いると $Y=y$ となる確率は,

$$P(Y=y)={}_2\mathrm{C}_y\left(\frac{1}{3}\right)^y\left(1-\frac{1}{3}\right)^{2-y}\qquad (y=0,\,1,\,2)$$

であたえられる. 確率分布は,

$$P(Y=y)=\begin{cases}\dfrac{4}{9} & (y=0,\,1)\\[2mm] \dfrac{1}{9} & (y=2)\end{cases}$$

これをもとに確率分布表を作成すると

y	0	1	2	計
$P(Y=y)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

111

$$E[X]=2\times\frac{3}{7}+3\times\frac{1}{7}+5\times\frac{1}{7}+7\times\frac{2}{7}=\mathbf{4}$$

$$E[Y]=0\times\frac{4}{9}+1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{1}{9}=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

112

$$E[Y+1]=E[Y]+1=\frac{2}{3}+1=\mathbf{\frac{5}{3}}$$

$$E[Y^2]=0^2\times\frac{4}{9}+1^2\times\frac{4}{9}+2^2\times\frac{1}{9}=\mathbf{\frac{8}{9}}$$

113

$$E[2X+3]=2E[X]+3=2\cdot 1+3=\mathbf{5}$$

114 (1) 確率変数 X の平均を μ とおくと,

$$\begin{aligned}\mu&=E[X]\\&=(1+2+3+4+5+6)\cdot\frac{1}{6}\\&=\frac{7}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V[X]&=E[(X-\mu)^2]\\&=\left\{\left(1-\frac{7}{2}\right)^2+\left(2-\frac{7}{2}\right)^2+\left(3-\frac{7}{2}\right)^2\right.\\&\qquad\left.+\left(4-\frac{7}{2}\right)^2+\left(5-\frac{7}{2}\right)^2+\left(6-\frac{7}{2}\right)^2\right\}\cdot\frac{1}{6}\\&=\mathbf{\frac{35}{12}}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}E[X^2]&=(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)\cdot\frac{1}{6}\\&=\frac{91}{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V[X]&=E[X^2]-(E[X])^2\\&=\frac{91}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2\\&=\frac{182}{12}-\frac{147}{12}\\&=\mathbf{\frac{35}{12}}\end{aligned}$$

115

$$\begin{aligned}E[X]&=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{6}\\&=\mathbf{\frac{5}{3}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E[X^2]&=1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{6}\\&=\frac{10}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V[X]&=E[X^2]-(E[X])^2\\&=\frac{10}{3}-\left(\frac{5}{3}\right)^2\\&=\frac{30}{9}-\frac{25}{9}\\&=\mathbf{\frac{5}{9}}\end{aligned}$$

$$\sqrt{V[X]}=\mathbf{\frac{\sqrt{5}}{3}}$$

116

$$E[4X-5]=4E[X]-5=4\cdot 3-5=\mathbf{7}$$

$$V[4X-5]=4^2V[X]=16\cdot 2=\mathbf{32}$$

117

$$\begin{aligned}E[Z]&=E\left[\frac{X-8}{\sqrt{3}}\right]\\&=\frac{1}{\sqrt{3}}E[X]-\frac{8}{\sqrt{3}}\\&=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 8-\frac{8}{\sqrt{3}}\\&=\mathbf{0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V[X]&=V\left[\frac{X-8}{\sqrt{3}}\right]\\&=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2V[X]\\&=\frac{1}{3}\cdot 3\\&=\mathbf{1}\end{aligned}$$

118　1回の試行で赤玉の出る確率は $\dfrac{2}{3}$ であり，同一の試行を独立に4回繰り返すから，X の確率分布は，

$$P(X=k)={}_4\mathrm{C}_k\left(\frac{2}{5}\right)^k\left(\frac{3}{5}\right)^{4-k}$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

よって，X は**二項分布** $\left(4,\ \dfrac{2}{5}\right)$ **に従い**，確率分布は次のようになる．

k	0	1	2	3	4	計
$P(X=k)$	$\dfrac{81}{625}$	$\dfrac{216}{625}$	$\dfrac{216}{625}$	$\dfrac{96}{625}$	$\dfrac{16}{625}$	1

119　1回の試行でハートの出る確率は $\dfrac{13}{52}=\dfrac{1}{4}$ であり，同一の試行を独立に3回繰り返すから，X の確率分布は，

$$P(X=k)={}_3\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{3-k}$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

よって，X は**二項分布** $\left(3,\ \dfrac{1}{4}\right)$ **に従い**，確率分布は次のようになる．

k	0	1	2	3	計
$P(X=k)$	$\dfrac{27}{64}$	$\dfrac{27}{64}$	$\dfrac{9}{64}$	$\dfrac{1}{64}$	1

120　1の目が出る回数は二項分布 $\left(180,\ \dfrac{1}{6}\right)$ に従うから，

平均：$180\cdot\dfrac{1}{6}=\mathbf{30}$

分散：$180\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{5}{6}=\mathbf{25}$

標準偏差：$\sqrt{25}=\mathbf{5}$

121　当たりくじを引く回数は二項分布 $\left(25,\ \dfrac{3}{10}\right)$ に従うから，

平均：$25\cdot\dfrac{3}{10}=\mathbf{\dfrac{15}{2}}$

分散：$25\cdot\dfrac{3}{10}\cdot\dfrac{7}{10}=\mathbf{\dfrac{21}{4}}$

標準偏差：$\sqrt{\dfrac{21}{4}}=\mathbf{\dfrac{\sqrt{21}}{2}}$

122　平均が3であることより，$\lambda=3$
したがって，X はポアソン分布 $P_o(3)$ に従うから，

$$P(X=k)=e^{-3}\frac{3^k}{k!}\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

求める確率は，

$$\begin{aligned}1-P(X\leq 3)&=1-\left(\frac{3^0}{0!}+\frac{3^1}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}\right)\cdot e^{-3}\\&=1-\left(1+3+\frac{9}{2}+\frac{9}{2}\right)\cdot e^{-3}\\&=0.3527\cdots\\&\fallingdotseq\mathbf{0.353}\end{aligned}$$

123　マシンが投げる球数は非常に大きいから，はずれる球数 X は $n=100$，$p=0.02$ の二項分布 $B(100, 0.02)$ に従うと考えてよい．n が大きく，p が小さいから，$\lambda=np=2$ より，X は近似的にポアソン分布 $P_o(2)$ に従う．すなわち，

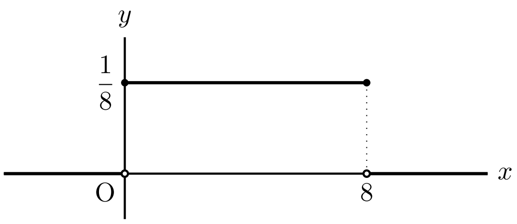
$$P(X=k)\fallingdotseq e^{-2}\frac{2^k}{k!}\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

よって求める確率は，

$$\begin{aligned}P(X\leq 2)&\fallingdotseq\sum_{k=0}^{2}e^{-2}\frac{2^k}{k!}=0.6766\cdots\\&\fallingdotseq\mathbf{0.677}\end{aligned}$$

124 X は 0 から 8 までの任意の実数の値をとり，どの値をとることも同程度に期待できるため，その確率分布は一様分布となる．したがって，X の確率密度関数は

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{8} & (0 \leq x \leq 8) \\ 0 & (x < 0,\, x > 8) \end{cases}$$



125 定数 k の値は,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= \int_{-1}^{2} kx^2\,dx \\ &= \frac{k}{3}\left[x^3\right]_{2}^{-1} \\ &= 3k \end{aligned}$$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ より，$\boldsymbol{k = \dfrac{1}{3}}$

(1)

$$\begin{aligned} P(0 \leq x \leq 1) &= \int_{0}^{1} f(x)\,dx \\ &= \int_{0}^{1} \frac{1}{3}x^2\,dx \\ &= \frac{1}{9}\left[x^3\right]_{0}^{1} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{9}} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} P(1 \leq x \leq 3) &= \int_{1}^{3} f(x)\,dx \\ &= \int_{1}^{2} \frac{1}{3}x^2\,dx \\ &= \frac{1}{9}\left[x^3\right]_{1}^{2} \\ &= \boldsymbol{\frac{7}{9}} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} P(-2 \leq x \leq 2) &= \int_{-2}^{2} f(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{2} \frac{1}{3}x^2\,dx \\ &= \frac{1}{9}\left[x^3\right]_{-1}^{2} \\ &= \boldsymbol{1} \end{aligned}$$

126

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx \\ &= \int_{0}^{1} x \cdot 3x^2\,dx \\ &= \left[\frac{3}{4}x^4\right]_{0}^{1} \\ &= \boldsymbol{\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V[X] &= E[X^2] - (E[X])^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - \left(\frac{3}{4}\right)^2 \\ &= \int_{0}^{1} x^2 \cdot 3x^2\,dx - \left(\frac{3}{4}\right)^2 \\ &= \left[\frac{3}{5}x^5\right]_{0}^{1} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 \\ &= \frac{3}{5} - \frac{9}{16} \\ &= \boldsymbol{\frac{3}{80}} \end{aligned}$$

127 教科書 p.66 問 18 の公式を用いて,

$$E[X] = \frac{1+4}{2} = \boldsymbol{\frac{5}{2}}$$

$$V[X] = \frac{(4-1)^2}{12} = \boldsymbol{\frac{3}{4}}$$

※問 18 の公式を用いない場合は以下のようになる．
X は区間 [1, 4] の一様分布より確率密度関数は,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4-1} & (1 \leq x \leq 4) \\ 0 & (x < 1,\, x > 4) \end{cases}$$

よって，X の平均と分散は,

$$\begin{aligned}E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx \\ &= \int_1^4 x\cdot\frac{1}{4-1}\,dx \\ &= \int_1^4 \frac{1}{3}x\,dx \\ &= \left[\frac{1}{6}x^2\right]_1^4 \\ &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V[X] &= E[X^2]-(E[X])^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - \left(\frac{5}{2}\right)^2 \\ &= \int_1^4 x^2\cdot\frac{1}{3}\,dx - \left(\frac{5}{2}\right)^2 \\ &= \left[\frac{1}{9}x^3\right]_1^4 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 \\ &= \frac{63}{9}-\frac{25}{4} \\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

以下，正規分布表をはじめとする数表は，教科書付表のものを用いることとする.

128 (1)

$$P(Z \geq 0.73) = \mathbf{0.2327}$$

(2)

$$\begin{aligned}P(Z \geq -1.92) &= P(Z \leq 1.92) \\ &= 1-P(Z \geq 1.92) \\ &= 1-0.0274 \\ &= \mathbf{0.9726}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}&P(1.49 \leq Z \leq 2.81) \\ &\quad = P(Z \geq 1.49) - P(Z \geq 2.81) \\ &\quad = 0.0681 - 0.0025 \\ &\quad = \mathbf{0.0656}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}&P(-0.65 \leq Z \leq 2.1) \\ &\quad = P(Z \geq -0.65) - P(Z \geq 2.1) \\ &\quad = \{1-P(Z \geq 0.65)\} - P(Z \geq 2.1) \\ &\quad = (1-0.2587) - 0.0179 \\ &\quad = \mathbf{0.7243}\end{aligned}$$

129 X は $N(13,\,10^2)$ に従うので, $Z = \dfrac{X-13}{10}$ は $N(0,\,1)$ に従う.

(1)

$$\begin{aligned}P(X \leq 18.6) &= P\left(Z \leq \frac{18.6-13}{10}\right) \\ &= P(Z \leq 0.56) \\ &= 1-P(Z \geq 0.56) \\ &= 1-0.2877 \\ &= \mathbf{0.7123}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}P(X \leq 0) &= P\left(Z \leq \frac{0-13}{10}\right) \\ &= P(Z \leq -1.3) \\ &= P(Z \geq 1.3) \\ &= \mathbf{0.0968}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}&P(6 \leq X \leq 20) \\ &\quad = P\left(\frac{6-13}{10} \leq Z \leq \frac{20-13}{10}\right) \\ &\quad = P(-0.7 \leq Z \leq 0.7) \\ &\quad = 1-2P(Z \geq 0.7) \\ &\quad = 1-2\cdot 0.2420 \\ &\quad = \mathbf{0.5160}\end{aligned}$$

(4)

$$P(1.5 \leq X \leq 10.7)$$
$$= P\left(\frac{1.5-13}{10} \leq Z \leq \frac{10.7-13}{10}\right)$$
$$= P(-1.15 \leq Z \leq -0.23)$$
$$= P(0.23 \leq Z \leq 1.15)$$
$$= P(Z \geq 0.23) - P(Z \geq 1.15)$$
$$= 0.4090 - 0.1251$$
$$= \mathbf{0.2839}$$

130　X は $N(159.0,\,5.7^2)$ に従うので，$Z = \dfrac{X-159.0}{5.7}$ は $N(0,\,1)$ に従う．このとき，$X \geq 165$ の確率は，

$$P(X \geq 165) = P\left(Z \geq \frac{165-159.0}{5.7}\right)$$
$$= P(Z \geq 1.05)$$
$$= 0.1469$$

したがって，求める人数は，

$$1000 \times P(X \geq 165) = 1000 \times 0.1469$$
$$= 146.9$$
$$\fallingdotseq 147$$

より**約 147 人**.

131　得点を X で表すとすると，X は $N(620,\,85^2)$ に従うので，$Z = \dfrac{X-620}{85}$ は $N(0,\,1)$ に従う．上位 5%以内に入るための最低点を x とおくと，

$$P(X \geq x) = P\left(Z \geq \frac{x-620}{85}\right) = 0.05$$

より，これを満たす x を求めればよい．
逆正規分布表から，

$$\frac{x-620}{85} = 1.6449 \quad \therefore x = 759.8\cdots$$

以上より，上位 5%以内に入るには，**760 点以上**をとる必要がある．

132　1 の目が出る回数を X とする．X は二項分布 $B(n,p)$，$n=900$，$p=\dfrac{1}{6}$ に従う．

$$np = 900 \cdot \frac{1}{6} = 150$$
$$\sqrt{npq} = \sqrt{900 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 11.18\cdots$$

ここで，n は十分に大きく近似式を用いると求める確率は，

$$P(145 \leq X \leq 155)$$
$$\fallingdotseq P\left(\frac{145-0.5-150}{11.18} \leq Z \leq \frac{155+0.5-150}{11.18}\right)$$
$$= P(-0.49 \leq Z \leq 0.49)$$
$$= 1 - 2P(Z \geq 0.49)$$
$$= 1 - 2 \cdot 0.3121$$
$$= \mathbf{0.3758}$$

133　フリースローが成功する回数を X とする．
X は二項分布 $B(n,p)$，$n=100$，$p=\dfrac{80}{100}$ に従う．

$$np = 100 \cdot \frac{80}{100} = 80$$
$$\sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot \frac{80}{100} \cdot \frac{20}{100}} = 4$$

ここで，n は十分に大きく近似式を用いると求める確率は，

$$P(X \geq 85) \fallingdotseq P\left(Z \geq \frac{85-0.5-150}{4}\right)$$
$$= 1 - P(Z \geq 1.125)$$
$$\fallingdotseq 1 - P(Z \geq 1.13)$$
$$= \mathbf{0.1292}$$