練習問題 2-A

1. それぞれの行列をAとおく．

（１）固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 5 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-3-\lambda)(1-\lambda)-5$$

$$= -3+2\lambda+\lambda^2-5$$

$$= \lambda^2+2\lambda-8$$

$$= (\lambda-2)(\lambda+4)$$

$(\lambda-2)(\lambda+4)=0$より，固有値は，$\lambda = \mathbf{2},\ \mathbf{-4}$

i）$\lambda=2$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_1}$とする．

$(A-2E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$より

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$5x-y=0$

$x=c_1$とおくと

$$\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{c_1}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{5} \end{pmatrix} \quad (\boldsymbol{c_1} \neq \mathbf{0})$$

ii）$\lambda=-4$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_2}$とする．

$(A+4E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$より

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x+y=0$

$y=c_2$とおくと

$$\boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{c_2}\begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (\boldsymbol{c_2} \neq \mathbf{0})$$

（２）固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)(1-\lambda)-8$$

$$= 3-4\lambda+\lambda^2-8$$

$$= \lambda^2-4\lambda-5$$

$$= (\lambda-5)(\lambda+1)$$

$(\lambda-5)(\lambda+1)=0$より，固有値は，$\lambda = \mathbf{5},\ \mathbf{-1}$

i）$\lambda=5$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_1}$とする．

$(A-5E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$より

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$2x-4y=0$

$x-2y=0$であるから，$y=c_1$とおくと

$$\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{c_1}\begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (\boldsymbol{c_1} \neq \mathbf{0})$$

ii）$\lambda=-1$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_2}$とする．

$(A+1E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$より

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$2x+2y=0$

$x+y=0$であるから，$y=c_2$とおくと

$$\boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{c_2}\begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (\boldsymbol{c_2} \neq \mathbf{0})$$

（３）固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-3-\lambda)(-1-\lambda)-(-1)$$

$$= 3+4\lambda+\lambda^2+1$$

$$= \lambda^2+4\lambda+4$$

$$= (\lambda+2)^2$$

$(\lambda+2)^2=0$より，固有値は，$\lambda = \mathbf{-2}$**（2 重解）**

$\lambda=-2$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x}$とする．

$(A+2E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$より

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x+y=0$

$y=c$とおくと

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}\begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (\boldsymbol{c} \neq \mathbf{0})$$

2. 与えられた行列をAとおき，固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 5 & 5 \\ 1 & -7-\lambda & -5 \\ -1 & 9 & 7-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} -3-\lambda & 5 & 0 \\ 1 & -7-\lambda & 2+\lambda \\ -1 & 9 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (2+\lambda)\begin{vmatrix} -3-\lambda & 5 & 0 \\ 1 & -7-\lambda & 1 \\ -1 & 9 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= (2+\lambda)\begin{vmatrix} -3-\lambda & 5 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 9 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= (2+\lambda)\cdot(-1)\begin{vmatrix} -3-\lambda & 5 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= -(2+\lambda)(-3-\lambda)(2-\lambda)$$
$$= -(\lambda+3)(\lambda+2)(\lambda-2)$$

$-(\lambda+3)(\lambda+2)(\lambda-2)=0$より，

固有値は，$\lambda = \mathbf{-3}, \mathbf{-2}, \mathbf{2}$

i）$\lambda=-3$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_1}$とする．

$$(A+3E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 9 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 9 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -4 & -5 \\ 0 & 5 & 5 \\ -1 & 9 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x-4y-5z=0$，$y+z=0$

$y=-z$，$x=z$であるから，$z=c_1$とおくと，

$$\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{c_1}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (\boldsymbol{c_1} \neq \mathbf{0})$$

ii）$\lambda=-2$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_2}$とする．

$$(A+2E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 5 \\ 1 & -5 & -5 \\ -1 & 9 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 5 \\ 1 & -5 & -5 \\ -1 & 9 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$-x+5y+5z=0$，$y+z=0$

$-y=z$，$x=0$であるから，$y=c_2$とおくと，

$$\boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{c_2}\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \end{pmatrix} \quad (\boldsymbol{c_2} \neq \mathbf{0})$$

iii）$\lambda=2$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_3}$とする．

$$(A-2E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -5 & 5 & 5 \\ 1 & -9 & -5 \\ -1 & 9 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} -5 & 5 & 5 \\ 1 & -9 & -5 \\ -1 & 9 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$-x+y+z=0$，$2y+z=0$

$z=-2y$，$x=-y$であるから，$-y=c_3$とおくと，

$$\boldsymbol{x_3} = \boldsymbol{c_3}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix} \quad (\boldsymbol{c_3} \neq \mathbf{0})$$

3. それぞれの行列をAとおく．

（１）固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (3-\lambda)(1-\lambda)-8$$
$$= 3-4\lambda+\lambda^2-8$$
$$= \lambda^2-4\lambda-5$$
$$= (\lambda-5)(\lambda+1)$$

$(\lambda-5)(\lambda+1)=0$より，固有値は，$\lambda=5, -1$

i）$\lambda=5$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_1}$とする．

$(A-5E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$より

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x-2y=0$

$y=c_1$とおくと

$$\boldsymbol{x_1} = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1 \neq 0)$$

ii）$\lambda=-1$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_2}$とする．

$(A+1E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$より

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x + y = 0$

$y = c_2$とおくと

$$\boldsymbol{x_2} = c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_2 \neq 0)$$

$\boldsymbol{x_1}$，$\boldsymbol{x_2}$は線形独立であるから，**対角化可能**で，

$P = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$とすれば

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

（２）固有多項式を求めると

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-3-\lambda)(-1-\lambda) - (-1)$$

$$= 3 + 4\lambda + \lambda^2 + 1$$

$$= \lambda^2 + 4\lambda + 4$$

$$= (\lambda + 2)^2$$

$(\lambda + 2)^2 = 0$より，固有値は，$\lambda = -2$（２重解）

固有ベクトルは，１個しか得られないので，

対角化はできない.

（３）固有多項式を求めると

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)^3$$

$(3-\lambda)^3 = 0$より，固有値は，$\lambda = 3$（３重解）

線形独立な固有ベクトルを３個得ることは

できないので，**対角化はできない.**

（４）固有多項式を求めると

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 1 \\ 5-\lambda & 3-\lambda & 1 \\ 5-\lambda & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (5-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (5-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (5-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (5-\lambda)(1-\lambda)^2$$

$(5-\lambda)(1-\lambda)^2 = 0$より，

固有値は，5，1（２重解）

i）$\lambda = 5$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_1}$とする．

$(A - 5E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$より

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x - 2y + z = 0$，$y - z = 0$

$y = z$，$x = z$であるから，$z = c_1$とおくと，

$$\boldsymbol{x_1} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1 \neq 0)$$

ii）$\lambda = 1$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_2}$とする．

$(A - 1E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$より

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x + 2y + z = 0$

$x = -2y - z$であるから，$y = c_2$，$z = c_3$とおくと，

$$\boldsymbol{x_2} = \begin{pmatrix} -2c_2 - c_3 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2c_2 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c_3 \\ 0 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$= c_2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ここで，$P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$とおくと

$$|P| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1-2) - 1$$

$$= -4 \neq 0$$

よって，Pは正則であるから，Aは**対角化可能**で

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{5}\end{pmatrix}$$

4.

（１）固有多項式を求めると

$$\begin{aligned}|A-\lambda E|&=\begin{vmatrix}8-\lambda&2\\2&5-\lambda\end{vmatrix}\\&=(8-\lambda)(5-\lambda)-4\\&=40-13\lambda+\lambda^2-4\\&=\lambda^2-13\lambda+36\\&=(\lambda-4)(\lambda-9)\end{aligned}$$

$(\lambda-4)(\lambda-9)=0$より，固有値は，$\lambda=4$，9

i）$\lambda=4$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_1}$とする．

$(A-4E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$より

$$\begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

よって，$2x+y=0$

$x=c_1$とおくと

$$\boldsymbol{x_1}=c_1\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\quad(c_1\neq0)$$

ii）$\lambda=9$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_2}$とする．

$(A-9E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$より

$$\begin{pmatrix}-1&2\\2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

よって，$-x+2y=0$

$y=c_2$とおくと

$$\boldsymbol{x_2}=c_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\quad(c_2\neq0)$$

大きさが 1 の固有ベクトルを$\boldsymbol{u_1}$，$\boldsymbol{u_2}$とする．

$$\begin{aligned}u_1&=\pm\frac{1}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\\&=\pm\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_2&=\pm\frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\\&=\pm\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって，たとえば

$T=\dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{5}}}\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{2}\\\mathbf{-2}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$とすれば

$${}^tTAT=\begin{pmatrix}\mathbf{4}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{9}\end{pmatrix}$$

（２）固有多項式を求めると

$$\begin{aligned}|B-\lambda E|&=\begin{vmatrix}3-\lambda&1&1\\1&2-\lambda&0\\1&0&2-\lambda\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}3-\lambda&1&0\\1&2-\lambda&-(2-\lambda)\\1&0&2-\lambda\end{vmatrix}\\&=(2-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda&1&0\\1&2-\lambda&-1\\1&0&1\end{vmatrix}\\&=(2-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda&1&0\\2&2-\lambda&0\\1&0&1\end{vmatrix}\\&=(2-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda&1\\2&2-\lambda\end{vmatrix}\\&=(2-\lambda)\{(3-\lambda)(2-\lambda)-2\}\\&=(2-\lambda)(6-5\lambda+\lambda^2-2)\\&=-(\lambda-2)(\lambda^2-5\lambda+4)\\&=-(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-4)\end{aligned}$$

$-(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-4)=0$より，固有値は，

$\lambda=1$，2，4

i）$\lambda=1$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_1}$とする．

$(B-1E)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$より

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}&\to\begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\\&\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\\&\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって，$x+y=0$，$-y+z=0$

$x=-y$，$z=y$であるから，$y=c_1$とおくと，

$$\boldsymbol{x_1}=c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\quad(c_1\neq0)$$

ii）$\lambda=2$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_2}$とする．

$(B-2E)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$より

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

よって，$x=0$，$x+y+z=0$

$z=-y$であるから，$y=c_2$とおくと，

$$\boldsymbol{x_2}=c_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\quad(c_2\neq 0)$$

iii）$\lambda=4$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_3}$とする．

$(B-4E)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$より

$$\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-2&0\\1&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-2&0\\1&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&-1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

よって，$-x+y+z=0$，$-y+z=0$

$y=z$，$x=2z$であるから，$z=c_3$とおくと，

$$\boldsymbol{x_3}=c_3\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\quad(c_3\neq 0)$$

大きさが 1 の固有ベクトルを$\boldsymbol{u_1}$，$\boldsymbol{u_2}$，$\boldsymbol{u_3}$とすると

$$\boldsymbol{u_1}=\pm\frac{1}{\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$u_2=\pm\frac{1}{\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$u_3=\pm\frac{1}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

よって，たとえば

$$T=\begin{pmatrix}-\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}&\mathbf{0}&\frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{6}}}\\\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}&\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}&\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{6}}}\\\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}&-\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}&\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{6}}}\end{pmatrix}\text{とすれば}$$

$${}^tTBT=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{2}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{4}\end{pmatrix}$$

5.

（１）与式 $=(x\quad y)\begin{pmatrix}8&2\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

ここで，$A=\begin{pmatrix}8&2\\2&5\end{pmatrix}$とおく．

Aの固有多項式を求めると

$$\begin{aligned}|A-\lambda E|&=\begin{vmatrix}8-\lambda&2\\2&5-\lambda\end{vmatrix}\\&=(8-\lambda)(5-\lambda)-4\\&=40-13\lambda+\lambda^2-4\\&=\lambda^2-13\lambda+36\\&=(\lambda-4)(\lambda-9)\end{aligned}$$

$(\lambda-4)(\lambda-9)=0$より，固有値は，$\lambda=4$，9

i）$\lambda=4$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_1}$とする．

$(A-4E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$より

$$\begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

よって，$2x+y=0$

$x=c_1$とおくと

$$\boldsymbol{x_1}=c_1\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\quad(c_1\neq 0)$$

ii）$\lambda=9$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_2}$とする．

$(A-9E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$より

$$\begin{pmatrix}-1&2\\2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

よって，$-x+2y=0$

$y=c_2$とおくと

$$\boldsymbol{x_2}=c_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\quad(c_2\neq 0)$$

大きさが 1 の固有ベクトルを$\boldsymbol{u_1}$，$\boldsymbol{u_2}$とすると

$$\boldsymbol{u_1}=\pm\frac{1}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u_2}=\pm\frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

直交行列Tを

$$T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$$

とすれば

$${}^tTAT=\begin{pmatrix}4&0\\0&9\end{pmatrix}$$

すなわち，$A=T\begin{pmatrix}4&0\\0&9\end{pmatrix}{}^tT$

よって

$$(x\quad y)T\begin{pmatrix}4&0\\0&9\end{pmatrix}{}^tT\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

ここで，$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}={}^tT\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$とすれば

$$(x'\quad y')\begin{pmatrix}4&0\\0&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

よって，標準形は，$\boldsymbol{4x'^2+9y'^2}$

（２）与式$=(x\quad y)\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

ここで，$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$とおく．

Aの固有多項式を求めると

$$\begin{aligned}|A-\lambda E|&=\begin{vmatrix}1-\lambda&1\\1&-1-\lambda\end{vmatrix}\\&=(1-\lambda)(-1-\lambda)-1\\&=-1+\lambda^2-1\\&=\lambda^2-2\\&=\left(\lambda+\sqrt{2}\right)\left(\lambda-\sqrt{2}\right)\end{aligned}$$

$\left(\lambda+\sqrt{2}\right)\left(\lambda-\sqrt{2}\right)=0$より，固有値は，$\lambda=\pm\sqrt{2}$

i）$\lambda=\sqrt{2}$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_1}$とする．

$\left(A-\sqrt{2}E\right)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$より

$$\begin{pmatrix}1-\sqrt{2}&1\\1&-1-\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

よって，$\left(1-\sqrt{2}\right)x+y=0$

$x=-c_1$とおくと，

$$\boldsymbol{x_1}=c_1\begin{pmatrix}-1\\1-\sqrt{2}\end{pmatrix}\quad(c_1\neq0)$$

ii）$\lambda=-\sqrt{2}$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_2}$とする．

$\left(A+\sqrt{2}E\right)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$より

$$\begin{pmatrix}1+\sqrt{2}&1\\1&-1+\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

よって，$\left(1+\sqrt{2}\right)x+y=0$

$x=-c_2$とおくと

$$\boldsymbol{x_2}=c_2\begin{pmatrix}-1\\1+\sqrt{2}\end{pmatrix}\quad(c_2\neq0)$$

大きさが 1 の固有ベクトルを$\boldsymbol{u_1}$，$\boldsymbol{u_2}$とすると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u_1}&=\pm\frac{1}{\sqrt{(-1)^2+\left(1-\sqrt{2}\right)^2}}\begin{pmatrix}-1\\1-\sqrt{2}\end{pmatrix}\\&=\pm\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\begin{pmatrix}-1\\1-\sqrt{2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u_2}&=\pm\frac{1}{\sqrt{(-1)^2+\left(1+\sqrt{2}\right)^2}}\begin{pmatrix}-1\\1+\sqrt{2}\end{pmatrix}\\&=\pm\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\begin{pmatrix}-1\\1+\sqrt{2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

簡単に記すために，

$\alpha=\sqrt{4-2\sqrt{2}}$，$\beta=\sqrt{4+2\sqrt{2}}$とおく，

直交行列Tを

$$T=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\alpha}&-\frac{1}{\beta}\\ \frac{1-\sqrt{2}}{\alpha}&\frac{1+\sqrt{2}}{\beta}\end{pmatrix}$$

とすれば

$${}^tTAT=\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0\\0&-\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

すなわち，$A=T\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0\\0&-\sqrt{2}\end{pmatrix}{}^tT$

よって

$$(x\quad y)T\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0\\0&-\sqrt{2}\end{pmatrix}{}^tT\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

ここで，$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}={}^tT\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$とすれば

$$(x'\quad y')\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0\\0&-\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

よって，標準形は，$\boldsymbol{\sqrt{2}x'^2-\sqrt{2}y'^2}$

6. Aの固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&3\\2&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$= (2-\lambda)(1-\lambda)-6$
$= 2-3\lambda+\lambda^2-6$
$= \lambda^2-3\lambda-4$
$= (\lambda-4)(\lambda+1)$

$(\lambda-4)(\lambda+1)=0$より，固有値は，$\lambda=4$，-1

i）$\lambda=4$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_1}$とする．

$(A-4E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$より

$\begin{pmatrix}-2 & 3\\2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

よって，$-2x+3y=0$
$x=3c_1$とおくと

$\boldsymbol{x_1}=c_1\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\quad(c_1\neq 0)$

ii）$\lambda=-1$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_2}$とする．

$(A+1E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$より

$\begin{pmatrix}3 & 3\\2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

よって，$x+y=0$
$x=c_2$とおくと

$\boldsymbol{x_2}=c_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\quad(c_2\neq 0)$

ここで，$P=\begin{pmatrix}3 & 1\\2 & -1\end{pmatrix}$，$D=\begin{pmatrix}4 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$

とすれば，$P^{-1}AP=D$，すなわち，$A=PDP^{-1}$

また，$P^{-1}=\dfrac{1}{-3-2}\begin{pmatrix}-1 & -1\\-2 & 3\end{pmatrix}=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & -3\end{pmatrix}$

よって

$$
\begin{aligned}
A^n &= (PDP^{-1})^n\\
&= PD^nP^{-1}\\
&= \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 1\\2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & -3\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 1\\2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4^n & 0\\0 & (-1)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & -3\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\cdot 4^n & 1\cdot(-1)^n\\2\cdot 4^n & -1\cdot(-1)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & -3\end{pmatrix}\\
&= \boldsymbol{\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\cdot 4^n+2\cdot(-1)^n & 3\cdot 4^n-3\cdot(-1)^n\\2\cdot 4^n-2\cdot(-1)^n & 2\cdot 4^n+3\cdot(-1)^n\end{pmatrix}}
\end{aligned}
$$

練習問題 2-B

1.

固有値がλのときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x}$とすると，
$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$である．

固有値 2 に対する固有ベクトルが，$c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$であるから，

$A\left\{c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}=2\cdot c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

すなわち，$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$・・・①

また，固有値 4 に対する固有ベクトルが，

$c_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$であるから，

$A\left\{c_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}=4\cdot c_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

すなわち，$A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$・・・②

①，②より

$A\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 8\\2 & 4\end{pmatrix}$

よって

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix}2 & 8\\2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\\
&= \frac{1}{1-2}\begin{pmatrix}2 & 8\\2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\-1 & 1\end{pmatrix}\\
&= -1\cdot\begin{pmatrix}2-8 & -4+8\\2-4 & -4+4\end{pmatrix}\\
&= \boldsymbol{\begin{pmatrix}6 & -4\\2 & 0\end{pmatrix}}
\end{aligned}
$$

2.

（１）与えられた等式において，$\lambda=0$とすれば
$|A-0E|=(-1)^3(0-\lambda_1)(0-\lambda_2)(0-\lambda_3)$
$|A|=(-1)(-\lambda_1)(-\lambda_2)(-\lambda_3)$
すなわち，$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|A|$

（２）Aが正則ならば，$|A|\neq 0$
よって，（１）より
$\lambda_1\lambda_2\lambda_3\neq 0$であるから，
$\lambda_1\neq 0$かつ$\lambda_2\neq 0$かつ$\lambda_3\neq 0$
すなわち，Aの固有値はすべて 0 ではない．

3.

Aの固有値λに対する固有ベクトルを$\boldsymbol{x}$とすると

$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$・・・①

（１）①の両辺に，左からAをかけると

$$\begin{aligned} A^2\boldsymbol{x} &= A\lambda\boldsymbol{x} \\ &= \lambda A\boldsymbol{x} \\ &= \lambda(\lambda\boldsymbol{x}) \\ &= \lambda^2\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

$A^2\boldsymbol{x} = \lambda^2\boldsymbol{x}$であるから，これは，$\lambda^2$が$A^2$の固有値であることを示している．

（２）Aが正則であれば，Aは逆行列をもつので，

①の両辺に，左からA^{-1}をかけると

$$A^{-1}A\boldsymbol{x} = A^{-1}\lambda\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{x} = \lambda A^{-1}\boldsymbol{x}$$

$$\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{x}$$

$A^{-1}\boldsymbol{x} = \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{x}$であるから，これは，$\frac{1}{\lambda}$が$A^{-1}$の固有値であることを示している．

4.

$$Q = (x \quad y \quad z)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

と表すことができる．

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$とおいて，固有多項式を求めると

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4-\lambda & 4-\lambda \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (4-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (4-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (4-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (4-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) \end{aligned}$$

$(4-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) = 0$より，固有値は，

$\lambda = -1$，1，4

i）$\lambda = -1$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_1}$とする．

$(A + 1E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$より

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x + 3y + z = 0$，$-5y = 0$

$z = -x$，$y = 0$であるから，$x = c_1$とおくと，

$$\boldsymbol{x_1} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (c_1 \neq 0)$$

ii）$\lambda = 1$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_2}$とする．

$(A - 1E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$より

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x + y + z = 0$，$y + 2z = 0$

$y = -2z$，$x = z$であるから，$z = c_2$とおくと，

$$\boldsymbol{x_2} = c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_2 \neq 0)$$

iii）$\lambda = 4$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_3}$とする．

$(A - 4E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$より

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x - 2y + z = 0$，$-y + z = 0$

$y = z$，$x = z$であるから，$z = c_3$とおくと，

$$\boldsymbol{x_3} = c_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_3 \neq 0)$$

大きさが 1 の固有ベクトルを$\boldsymbol{u_1}$，$\boldsymbol{u_2}$，$\boldsymbol{u_3}$とすると

$$\boldsymbol{u_1} = \pm\frac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$
$$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{u_2} = \pm\frac{1}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$
$$= \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{u_3} = \pm\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$
$$= \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

よって，固有値の値が小さい順に列ベクトルを並べ，
たとえば

$$T = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\text{とすれば}$$

$${}^tTAT = \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$$

すなわち，$A = T\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}{}^tT$

よって，$(x \quad y \quad z)T\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}{}^tT\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

ここで，$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} = {}^tT\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$とすれば

$$(x' \quad y' \quad z')\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$$

すなわち，$Q = -x'^2 + y'^2 + 4z'^2$であるから

$\boldsymbol{\alpha = -1}$**，**$\boldsymbol{\beta = 1}$**，**$\boldsymbol{\gamma = 4}$

5.

Tが 1 を固有値にもつことを証明するには，

$|T-E| = 0$となることを証明すればよい．

直交行列と行列式の性質を用いて，

$$\begin{aligned}|T-E| &= |{}^t(T-E)|\cdot 1\\ &= |{}^t(T-E)||T|\\ &= |E-T|\\ &= |-(T-E)|\\ &= (-1)^3|T-E|\\ &= -|T-E|\end{aligned}$$

よって，$|T-E| = -|T-E|$であるから，

$$2|T-E| = 0$$
$$|T-E| = 0$$

したがって，Tは 1 を固有値にもつ．