4章　行列の応用

§2　固有値とその応用（p.138～p.156）

問１

$$A\boldsymbol{x_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{x_1}$$

$$A\boldsymbol{x_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\boldsymbol{x_2}$$

よって，$\boldsymbol{x_1}$，$\boldsymbol{x_2}$はAの固有ベクトルであり，
固有値は，それぞれ，$\mathbf{2}$，$\mathbf{3}$である．

問２

（１）固有多項式を求めると

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -3 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(4-\lambda) - 3$$
$$= \lambda^2 - 6\lambda + 8 - 3$$
$$= \lambda^2 - 6\lambda + 5$$
$$= (\lambda - 1)(\lambda - 5)$$

$(\lambda-1)(\lambda-5) = 0$より，固有値は，$\lambda = \mathbf{1}，\mathbf{5}$

i）$\lambda = 1$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_1}$とする．

$$(A - 1E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ より

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x - y = 0$より，$x = y$
$x = c_1$とおくと

$$\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{c_1}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (\boldsymbol{c_1} \neq \mathbf{0})$$

ii）$\lambda = 5$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_2}$とする．

$$(A - 5E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ より

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$-3x - y = 0$より，$-3x = y$
$x = c_2$とおくと

$$\boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{c_2}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-3} \end{pmatrix} \quad (\boldsymbol{c_2} \neq \mathbf{0})$$

（２）固有多項式を求めると

$$|B - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(3-\lambda)$$

$(2-\lambda)(3-\lambda) = 0$より，固有値は，$\lambda = \mathbf{2}，\mathbf{3}$

i）$\lambda = 2$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_1}$とする．

$$(B - 2E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ より

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$y = 0$
$x = c_1$とおくと

$$\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{c_1}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (\boldsymbol{c_1} \neq \mathbf{0})$$

ii）$\lambda = 3$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_2}$とする．

$$(B - 3E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ より

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$-x + y = 0$より，$x = y$
$x = c_2$とおくと

$$\boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{c_2}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (\boldsymbol{c_2} \neq \mathbf{0})$$

問３

（１）固有多項式を求めると

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & -3 \\ 2 & 2-\lambda & -6 \\ 2 & 2 & -6-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & -3 \\ -2-\lambda & 2-\lambda & -6 \\ -2-\lambda & 2 & -6-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2-\lambda & -6 \\ 1 & 2 & -6-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -\lambda & -3 \\ 0 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda+2)\begin{vmatrix} -\lambda & -3 \\ 0 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda+2)\{-\lambda(-3-\lambda)-0\}$$

$$= -\lambda(\lambda+2)(\lambda+3)$$

$-\lambda(\lambda+2)(\lambda+3)=0$より，固有値は

$\lambda = \mathbf{0}, \mathbf{-2}, \mathbf{-3}$

i）$\lambda=0$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_1}$とする．

$(A-0E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$より

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -6 \\ 2 & 2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -6 \\ 2 & 2 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$-x+2y-3z=0$，$y-2z=0$

$y=2z$，$x=z$であるから，$z=c_1$とおくと，

$$\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{c_1}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (\boldsymbol{c_1} \neq \mathbf{0})$$

ii）$\lambda=-2$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_2}$とする．

$(A+2E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$より

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x+2y-3z=0$，$-y+z=0$

$x=y=z$であるから，$z=c_2$とおくと，

$$\boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{c_2}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (\boldsymbol{c_2} \neq \mathbf{0})$$

iii）$\lambda=-3$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_3}$とする．

$(A+3E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$より

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -6 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -6 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$2x+2y-3z=0$，$y-z=0$

$y=z$，$x=\dfrac{1}{2}z$であるから，$z=2c_3$とおくと，

$$\boldsymbol{x_3} = \boldsymbol{c_3}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix} \quad (\boldsymbol{c_3} \neq \mathbf{0})$$

（２）固有多項式を求めると

$$|B-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\{(1-\lambda)(5-\lambda)-(-3)\}$$

$$= (1-\lambda)(5-6\lambda+\lambda^2+3)$$

$$= -(\lambda-1)(\lambda^2-6\lambda+8)$$

$$= -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4)$$

$-(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4)=0$より，固有値は

$\lambda = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{4}$

i）$\lambda=1$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_1}$とする．

$(B-1E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$より

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$-y+4z=0$，$z=0$

$y=z=0$であるから，$x=c_1$とおくと，

$$\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{c_1}\begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (\boldsymbol{c_1} \neq \mathbf{0})$$

ii）$\lambda=2$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_2}$とする．

$(B-2E)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$より

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 3\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}-1 & 0 & 8\\ 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

よって，$-x+8z=0$，$-y+3z=0$

$x=8z$，$y=3z$であるから，$z=c_2$とおくと，

$$\boldsymbol{x_2}=\boldsymbol{c_2}\begin{pmatrix}\mathbf{8}\\ \mathbf{3}\\ \mathbf{1}\end{pmatrix} \quad (\boldsymbol{c_2}\neq\mathbf{0})$$

iii）$\lambda=4$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_3}$とする．

$(B-4E)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$より

$$\begin{pmatrix}-3 & 3 & -1\\ 0 & -3 & 3\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix}-3 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & -3 & 3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}-3 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

よって，$-3x+2z=0$，$-y+z=0$

$x=\dfrac{2}{3}z$，$y=z$であるから，$z=3c_3$とおくと，

$$\boldsymbol{x_3}=\boldsymbol{c_3}\begin{pmatrix}\mathbf{2}\\ \mathbf{3}\\ \mathbf{3}\end{pmatrix} \quad (\boldsymbol{c_3}\neq\mathbf{0})$$

$\boxed{\text{問4}}$

（１）固有多項式を求めると

$$\begin{aligned}
|A-\lambda E| &= \begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & 1\\ -1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix}-\lambda & -1 & 0\\ -\lambda & 1-\lambda & 2-\lambda\\ 2 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}\\
&= (2-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda & -1 & 0\\ -\lambda & 1-\lambda & 1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}\\
&= (2-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda & -1 & 0\\ -2-\lambda & -\lambda & 0\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}\\
&= (2-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda & -1\\ -2-\lambda & -\lambda\end{vmatrix}\\
&= (2-\lambda)\{(-\lambda)^2-(-1)\cdot(-2-\lambda)\}\\
&= (2-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2)\\
&= -(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda+1)\\
&= -(\lambda+1)(\lambda-2)^2
\end{aligned}$$

$-(\lambda+1)(\lambda-2)^2=0$より，固有値は

$\boldsymbol{\lambda=-1}$，**２（２重解）**

i）$\lambda=-1$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_1}$とする．

$(A+1E)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$より

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & -3 & -3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

よって，$x+y+2z=0$，$y+z=0$

$y=-z$，$x=-z$であるから，$z=c_1$とおくと，

$$\boldsymbol{x_1}=\boldsymbol{c_1}\begin{pmatrix}\mathbf{-1}\\ \mathbf{-1}\\ \mathbf{1}\end{pmatrix} \quad (\boldsymbol{c_1}\neq\mathbf{0})$$

ii）$\lambda=2$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_2}$とする．

$(A-2E)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$より

$$\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

よって，$-x-y+z=0$

$x=-y+z$であるから，$y=c_2$，$z=c_3$とおくと，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x_2} &= \begin{pmatrix}-c_2+c_3\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix}\\
&= \boldsymbol{c_2}\begin{pmatrix}\mathbf{-1}\\ \mathbf{1}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}+\boldsymbol{c_3}\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{1}\end{pmatrix} \quad (\boldsymbol{c_2}\neq\mathbf{0}\text{ または }\boldsymbol{c_3}\neq\mathbf{0})
\end{aligned}$$

（２）固有多項式を求めると

$$\begin{aligned}
|B-\lambda E| &= \begin{vmatrix}-\lambda & 1 & -1\\ 4 & 1-\lambda & 0\\ 1 & 3 & -2-\lambda\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ 4 & 1-\lambda & 1-\lambda\\ 1 & 3 & 1-\lambda\end{vmatrix}\\
&= (1-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ 4 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}\\
&= (1-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ 3 & -2-\lambda & 0\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}\\
&= (1-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ 3 & -2-\lambda\end{vmatrix}\\
&= (1-\lambda)\{-\lambda(-2-\lambda)-3\}\\
&= (1-\lambda)(\lambda^2+2\lambda-3)\\
&= -(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda+3)\\
&= -(\lambda+3)(\lambda-1)^2
\end{aligned}$$

$-(\lambda+3)(\lambda-1)^2=0$より，固有値は

$\boldsymbol{\lambda=-3,\ 1}$ **（２重解）**

i）$\lambda=-3$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_1}$とする．

$(B+3E)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$より

$\begin{pmatrix}3&1&-1\\4&4&0\\1&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix}3&1&-1\\4&4&0\\1&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&1\\4&4&0\\3&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&1\\0&-8&-4\\0&-8&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&1\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

よって，$x+3y+z=0$，$2y+z=0$

$y=-\frac{1}{2}z$，$x=\frac{1}{2}z$であるから，$z=2c_1$とおくと，

$\boldsymbol{x_1=c_1\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\quad (c_1\neq 0)}$

ii）$\lambda=1$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_2}$とする．

$(B-1\lambda)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-1&1&-1\\4&0&0\\1&3&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix}-1&1&-1\\4&0&0\\1&3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&1&-1\\1&0&0\\1&3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&3&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

よって，$y-z=0$，$x=0$

$y=z$であるから，$z=c_2$とおくと，

$\boldsymbol{x_2=c_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\quad (c_2\neq 0)}$

問５

$P=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}$より

$P^{-1}=\frac{1}{1-2}\begin{pmatrix}1&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\1&-1\end{pmatrix}$

よって

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&2\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&6\\-3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4-6&-6+10\\-4+3&6-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2&4\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2+4&-4+4\\-1+1&-2+1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}=\text{右辺}$$

問６

（１）固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}4-\lambda&1\\3&2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(4-\lambda)(2-\lambda)-3$$

$$=8-6\lambda+\lambda^2-3$$

$$=\lambda^2-6\lambda+5$$

$$=(\lambda-5)(\lambda-1)$$

$(\lambda-5)(\lambda-1)=0$より，固有値は

$\lambda=5,\ 1$

i）$\lambda=5$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_1}$とする．

$(A-5E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$より

$\begin{pmatrix}-1&1\\3&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

よって，$-x+y=0$

$x=y$であるから，$y=c_1$とおくと，

$\boldsymbol{x_1}=c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\quad (c_1\neq 0)$

ii）$\lambda=1$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_2}$とする．

$(A-1E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$より

$\begin{pmatrix}3&1\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

よって，$3x+y=0$

$-3x=y$であるから，$x=c_2$とおくと，

$\boldsymbol{x_2}=c_2\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}\quad (c_2\neq 0)$

たとえば，$c_1=c_2=1$とおき

$P=(\boldsymbol{x_1}\quad \boldsymbol{x_2})=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{1}\\\mathbf{1}&\mathbf{-3}\end{pmatrix}$

とすれば

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\mathbf{5} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$$

（２）固有多項式を求めると

$$\begin{aligned}|B-\lambda E|&=\begin{vmatrix}3-\lambda & 3\\ 4 & 2-\lambda\end{vmatrix}\\ &=(3-\lambda)(2-\lambda)-12\\ &=6-5\lambda+\lambda^2-12\\ &=\lambda^2-5\lambda-6\\ &=(\lambda+1)(\lambda-6)\end{aligned}$$

$(\lambda+1)(\lambda-6)=0$より，固有値は

$\lambda=-1,\ 6$

i）$\lambda=-1$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_1}$とする．

$(B+1E)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$より

$$\begin{pmatrix}4 & 3\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

よって，$4x+3y=0$であるから，$y=4c_1$とおくと，

$$\boldsymbol{x_1}=c_1\begin{pmatrix}-3\\ 4\end{pmatrix}\quad(c_1\neq 0)$$

ii）$\lambda=6$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_2}$とする．

$(B-6E)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$より

$$\begin{pmatrix}-3 & 3\\ 4 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

よって，$-x+y=0$

$y=c_2$とおくと，

$$\boldsymbol{x_2}=c_2\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\quad(c_2\neq 0)$$

たとえば，$c_1=c_2=1$とおき

$$P=(\boldsymbol{x_1}\quad \boldsymbol{x_2})=\begin{pmatrix}\mathbf{-3} & \mathbf{1}\\ \mathbf{4} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$$

とすれば

$$P^{-1}BP=\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{6}\end{pmatrix}$$

問７

（１）問３の結果より

固有値は，$\lambda=0,\ -2,\ -3$

それぞれの固有値に対する固有ベクトルは

$$\boldsymbol{x_1}=c_1\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}\quad(c_1\neq 0)$$

$$\boldsymbol{x_2}=c_2\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\quad(c_2\neq 0)$$

$$\boldsymbol{x_3}=c_3\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 2\end{pmatrix}\quad(c_3\neq 0)$$

したがって，たとえば，$c_1=c_2=c_3=1$とおき

$$P=(\boldsymbol{x_1}\quad \boldsymbol{x_2}\quad \boldsymbol{x_3})=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2}\end{pmatrix}$$

とすれば

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-3}\end{pmatrix}$$

（２）問３の結果より

固有値は，$\lambda=1,\ 2,\ 4$

それぞれの固有値に対する固有ベクトルは

$$\boldsymbol{x_1}=c_1\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\quad(c_1\neq 0)$$

$$\boldsymbol{x_2}=c_2\begin{pmatrix}8\\ 3\\ 1\end{pmatrix}\quad(c_2\neq 0)$$

$$\boldsymbol{x_3}=c_3\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 3\end{pmatrix}\quad(c_3\neq 0)$$

たとえば，$c_1=c_2=c_3=1$とおき

$$P=(\boldsymbol{x_1}\quad \boldsymbol{x_2}\quad \boldsymbol{x_3})=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{8} & \mathbf{2}\\ \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{3}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3}\end{pmatrix}$$

とすれば

$$P^{-1}BP=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{4}\end{pmatrix}$$

問８

【行列A】問４の結果より

固有値は，$\lambda=-1,\ 2$（２重解）

それぞれの固有値に対する固有ベクトルは

$$\boldsymbol{x_1}=c_1\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}\quad(c_1\neq 0)$$

$$\boldsymbol{x_2}=c_2\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\quad(c_2\neq 0\text{ または }c_3\neq 0)$$

$P=\begin{pmatrix}\mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$とおくと

$$\begin{aligned}P&=\begin{vmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}\\ &=(-1+0+0)-(1+1+0)\\ &=-3\neq 0\end{aligned}$$

よって，Pは正則であるから，Aは**対角化可能**で

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\mathbf{-1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{2}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{2}\end{pmatrix}$$

【行列B】問 4 の結果より

固有値は，$\lambda=-3$，1（2 重解）

それぞれの固有値に対する固有ベクトルは

$$\boldsymbol{x_1}=c_1\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\quad(c_1\neq 0)$$

$$\boldsymbol{x_2}=c_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\quad(c_2\neq 0)$$

したがって，線形独立な固有ベクトルが 2 個しかとれないので，行列Bは**対角化可能でない.**

問 9

固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-2-\lambda&2\\2&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(-2-\lambda)(1-\lambda)-4$$

$$=-2+\lambda+\lambda^2-4$$

$$=\lambda^2+\lambda-6$$

$$=(\lambda+3)(\lambda-2)$$

$(\lambda+3)(\lambda-2)=0$より，固有値は

$\lambda=-3$，2

i) $\lambda=-3$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_1}$とする.

$$(A+3E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\text{より}$$

$$\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

よって，$x+2y=0$

$y=c_1$とおくと，

$$\boldsymbol{x_1}=c_1\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\quad(c_1\neq 0)$$

ii) $\lambda=2$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_2}$とする.

$$(A-2E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\text{より}$$

$$\begin{pmatrix}-4&2\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

よって，$2x-y=0$

$x=c_2$とおくと，

$$\boldsymbol{x_2}=c_2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\quad(c_2\neq 0)$$

$\boldsymbol{x_1}$，$\boldsymbol{x_2}$は互いに直交している.

大きさが 1 の固有ベクトルを$\boldsymbol{u_1}$，$\boldsymbol{u_2}$とすると

$$\boldsymbol{u_1}=\pm\frac{1}{\sqrt{(-2)^2+1^2}}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}=\pm\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u_2}=\pm\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\pm\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

よって，たとえば

$$T=\begin{pmatrix}-\frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{5}}}&\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{5}}}\\\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{5}}}&\frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{5}}}\end{pmatrix}\text{とすれば}$$

$${}^tTAT=\begin{pmatrix}\mathbf{-3}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{2}\end{pmatrix}$$

問 10

固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&1&-1\\1&-\lambda&1\\-1&1&-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-\lambda&1&0\\1&-\lambda&1-\lambda\\-1&1&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda&1&0\\1&-\lambda&1\\-1&1&1\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda&1&0\\2&-1-\lambda&0\\-1&1&1\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda&1\\2&-1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\{-\lambda(-1-\lambda)-2\}$$

$$=(1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-2)$$

$$=-(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda+2)$$

$$=-(\lambda+2)(\lambda-1)^2$$

$-(\lambda+2)(\lambda-1)^2=0$より，固有値は

$\lambda=-2$，1（2 重解）

i) $\lambda=-2$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_1}$とする.

$$(A+2E)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\text{より}$$

$$\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&1\\-1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&1\\-1&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&-1\\-1&1&2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-3&-3\\0&3&3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

よって，$x+2y+z=0$，$y+z=0$

$y=-z$，$x=z$であるから，$z=c_1$とおくと，

$$\boldsymbol{x_1}=c_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\quad(c_1\neq 0)$$

ii）$\lambda=1$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_2}$とする．

$(A-1E)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$より

$$\begin{pmatrix}-1&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

係数行列に行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix}-1&1&-1\\1&-1&1\\-1&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

よって，$-x+y-z=0$

$y=c_2$，$z=c_3$とおくと，$x=c_2-c_3$

$$\boldsymbol{x_2}=\begin{pmatrix}c_2-c_3\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$$

$$=c_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\quad(c_2\neq 0\text{ または }c_3\neq 0)$$

ここで，$\boldsymbol{p_2}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p_3}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$とおく．

$\boldsymbol{p_2}$と同じ向きの単位ベクトルを$\boldsymbol{u_2}$とすると

$$\boldsymbol{u_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{p_3}$の$\boldsymbol{p_2}$への正射影を求めると

$$(\boldsymbol{u_2}\cdot\boldsymbol{p_3})\boldsymbol{u_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+0+0)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

よって

$$\boldsymbol{q_3}=\boldsymbol{p_3}-(\boldsymbol{u_2}\cdot\boldsymbol{p_3})\boldsymbol{u_2}$$

$$=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

とすれば，$\boldsymbol{q_3}$は$\boldsymbol{p_2}$と直交する．

$\boldsymbol{x_1}$，$\boldsymbol{p_2}$，$\boldsymbol{q_3}$に平行な単位ベクトルを用いて，

たとえば，直交行列Tを

$$T=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}}&\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}}&-\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{6}}}\\-\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}}&\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}}&\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{6}}}\\\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{6}}}\end{pmatrix}\text{とすれば，}$$

$${}^tTAT=\begin{pmatrix}\boldsymbol{-2}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{1}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{1}\end{pmatrix}$$

問 11

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=T\boldsymbol{x}'$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\\\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

よって，$\begin{cases}x=\dfrac{x'-y'}{\sqrt{2}}\\y=\dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}}\end{cases}$

これらを，等式の左辺に代入すると

$$\text{左辺}=3\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2-2\cdot\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\cdot\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}+3\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$=\frac{3(x'-y')^2-2(x'^2-y'^2)+3(x'+y')^2}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\{3(x'^2-2x'y'+y'^2)-2x'^2$$

$$+2y'^2+3(x'^2+2x'y'+y'^2)\}$$

$$=\frac{1}{2}(4x'^2+8y'^2)$$

$$=2x'^2+4y'^2=\text{右辺}$$

問 12

（１）与式は，$(x\quad y)\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$と表すことができるので，

$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$とおく．

Aの固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2 - 4$$

$$= \{(1-\lambda)+2\}\{(1-\lambda)-2\}$$

$$= (-\lambda+3)(-\lambda-1)$$

$$= (\lambda-3)(\lambda+1)$$

$(\lambda-3)(\lambda+1)=0$より，固有値は

$\lambda = 3,\ 1$

ii）$\lambda=3$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_1}$とする．

$(A-3E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$より

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x-y=0$

$y=c_1$とおくと，

$$\boldsymbol{x_1} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1 \neq 0)$$

ii）$\lambda=-1$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_2}$とする．

$(A+1E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$より

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x+y=0$

$y=c_2$とおくと，

$$\boldsymbol{x_2} = c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_2 \neq 0)$$

大きさが 1 の固有ベクトルを，$\boldsymbol{u_1}$，$\boldsymbol{u_2}$とすると

$$\boldsymbol{u_1} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{u_2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

直交行列Tを

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$とすれば

$${}^tTAT = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

すなわち，$A = T\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}{}^tT$

よって

$$(x \quad y)T\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}{}^tT\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ここで，$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = {}^tT\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$とすれば

$$(x' \quad y')\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

よって，標準形は，$\boldsymbol{3x'^2 - y'^2}$

また，このとき

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x'-y'}{\sqrt{2}} \\ \frac{x'+y'}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

よって，$\begin{cases} \boldsymbol{x = \dfrac{x'-y'}{\sqrt{2}}} \\ \boldsymbol{y = \dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}}} \end{cases}$

（２）与式は，$(x \quad y)\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$と表すことができるので，

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$とおく．

Aの固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)(6-\lambda) - 4$$

$$= 18 - 9\lambda + \lambda^2 - 4$$

$$= \lambda^2 - 9\lambda + 14$$

$$= (\lambda-2)(\lambda-7)$$

$(\lambda-2)(\lambda-7)=0$より，固有値は

$\lambda = 2,\ 7$

i）$\lambda=2$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_1}$とする．

$(A-2E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$より

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって，$x-2y=0$

$y=c_1$とおくと，

$$\boldsymbol{x_1} = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1 \neq 0)$$

ii）$\lambda=7$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_2}$とする．

$(A-7E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$より

$\begin{pmatrix}-4&-2\\-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

よって，$2x+y=0$

$x=c_2$とおくと，

$\boldsymbol{x_2}=c_2\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\quad(c_2\neq0)$

大きさが 1 の固有ベクトルを，$\boldsymbol{u_1}$，$\boldsymbol{u_2}$とすると

$\boldsymbol{u_1}=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{u_2}=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

直交行列Tを

$T=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}&-\frac{1}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}&+\frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$とすれば

${}^tTAT=\begin{pmatrix}2&0\\0&7\end{pmatrix}$

すなわち，$A=T\begin{pmatrix}2&0\\0&7\end{pmatrix}{}^tT$

よって

$(x\quad y)T\begin{pmatrix}2&0\\0&7\end{pmatrix}{}^tT\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

ここで，$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}={}^tT\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$とすれば

$(x'\quad y')\begin{pmatrix}2&0\\0&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$

よって，標準形は，$\boldsymbol{2x'^2+7y'^2}$

また，このとき

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}&-\frac{1}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}&+\frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{2x'-y'}{\sqrt{5}}\\\frac{x'+2y'}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$$

よって，$\begin{cases}\boldsymbol{x=\frac{2x'-y'}{\sqrt{5}}}\\\boldsymbol{y=\frac{x'+2y'}{\sqrt{5}}}\end{cases}$

$\boxed{問 13}$

$2x^2+2xy+2y^2$は，$(x\quad y)\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$と表すこと

ができるので，ここで，$A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$とおく．

Aの固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&1\\1&2-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=(2-\lambda)^2-1$$
$$=\{(2-\lambda)+1\}\{(2-\lambda)-1\}$$
$$=(3-\lambda)(1-\lambda)$$
$$=(\lambda-3)(\lambda-1)$$

$(\lambda-3)(\lambda-1)=0$より，固有値は

$\lambda=3$，1

i）$\lambda=3$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_1}$とする．

$(A-3E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$より

$\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

よって，$x-y=0$

$x=c_1$とおくと，

$\boldsymbol{x_1}=c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\quad(c_1\neq0)$

ii）$\lambda=1$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_2}$とする．

$(A-1E)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$より

$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

よって，$x+y=0$

$y=c_2$とおくと，

$\boldsymbol{x_2}=c_2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\quad(c_2\neq0)$

大きさが 1 の固有ベクトルを，$\boldsymbol{u_1}$，$\boldsymbol{u_2}$とすると

$\boldsymbol{u_1}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{u_2}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

直交行列Tを

$$T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$ とすれば

$${}^tTAT=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

すなわち，$A=T\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}{}^tT$

よって

$$(x \quad y)T\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}{}^tT\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$ とすれば

$$(x' \quad y')\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$$

よって，標準形は，$\boldsymbol{3x'^2+y'^2}$

以上より，$(x',\ y')$は$3x'^2+y'^2=3$，すなわち，楕円

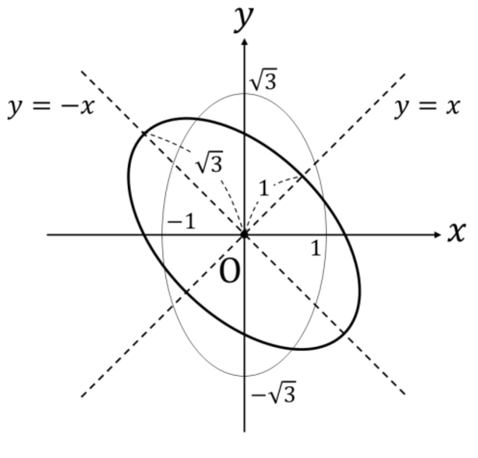
$$\frac{x'^2}{1^2}+\frac{y'^2}{(\sqrt{3})^2}=1$$ 上の点であり

$$\boldsymbol{x}=T\boldsymbol{x}'=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}'$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}'$$

であるから，$(x,\ y)$はこの楕円を，原点を中心に

$\frac{\pi}{4}$だけ回転した図形である．



$\boxed{\text{問 14}}$

固有多項式を求めると

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 3\\ -1 & 5-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)(5-\lambda)-(-3)$$

$$=5-6\lambda+\lambda^2+3$$

$$=\lambda^2-6\lambda+8$$

$$=(\lambda-2)(\lambda-4)$$

$(\lambda-2)(\lambda-4)=0$より，固有値は

$\lambda=2,\ 4$

i）$\lambda=2$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_1}$とする．

$$(A-2E)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$ より

$$\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

よって，$x-3y=0$

$y=c_1$とおくと，

$$\boldsymbol{x_1}=c_1\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}\quad (c_1\neq 0)$$

ii）$\lambda=4$のときの固有ベクトルを$\boldsymbol{x_2}$とする．

$$(A-4E)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$ より

$$\begin{pmatrix}-3 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

よって，$x-y=0$

$y=c_2$とおくと，

$$\boldsymbol{x_2}=c_2\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\quad (c_2\neq 0)$$

$$P=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$$

とすれば，$P^{-1}AP=D$，すなわち，$A=PDP^{-1}$

また，$P^{-1}=\frac{1}{3-1}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$

よって

$$A^n=(PDP^{-1})^n$$

$$=(PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1})$$

$$=PD^nP^{-1}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & 4^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\cdot 2^n & 4^n\\ 2^n & 4^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\cdot 2^n-4^n & -3\cdot 2^n+3\cdot 4^n\\ 2^n-4^n & -2^n+3\cdot 4^n\end{pmatrix}}$$