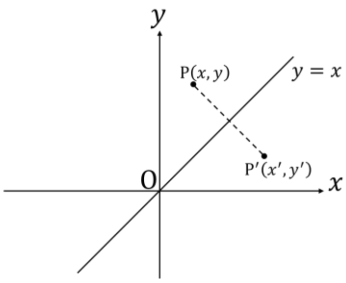
練習問題 1-A

1.



この変換は,

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

と表される．変換を表す行列は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

よって，$A = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

また,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

2.

fによる$(x,\ y)$の像を，$(x',\ y')$とすると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx + 0y \\ 0x + ky \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

よって，求める行列は

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{k} \end{pmatrix}$$

または，$\boldsymbol{k}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{kE}$ **（$\boldsymbol{E}$は単位行列）**

3.

題意より

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって

$$A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

したがって

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\left\{\frac{1}{2-(-1)}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4-1 & -2-1 \\ 6+0 & -3+0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

4.

直線$y = x$上の任意の点$(x,\ x)$のfによる像を$(x',\ y')$とすると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x + 4x \\ x + 3x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6x \\ 4x \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{cases} x' = 6x \\ y' = 4x \end{cases}$$

２式からxを消去すると

$$y' = \frac{2}{3}x'$$

したがって，像は**直線**$\boldsymbol{y = \frac{2}{3}x}$

5.

（１）f逆変換f^{-1}を表す行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-3-(-4)}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

よって，fにより，点$(-3,\ 2)$に移る点は

$$\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-8 \\ -3+2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

すなわち，**点$(\mathbf{1},\ -\mathbf{1})$**である．

（２）$f \circ f$により，点$(5,\ -3)$に移る点は，点$(5,\ -3)$をf^{-1}によって，２回変換すればよいので

$$\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -15+12 \\ 5-3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9-8 \\ -3+2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

すなわち，**点$(\mathbf{1},\ -\mathbf{1})$**である．

6.

$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$は，原点のまわりに$\theta$だけ回転する線形変換を表す行列であるから，左辺の$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^n$は，この変換を$n$回合成したものなので，原点のまわりに$n\theta$だけ回転する線形変換を表す．

一方，右辺の$\begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$は，原点のまわりに$n\theta$だけ回転する線形変換を表す行列であるから，両辺ともに同じ線形変換を表す行列である．

よって，$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$

【別解】※数学的帰納法による証明．

[1]$n=1$のとき

$$左辺 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$右辺 = \begin{pmatrix} \cos 1\theta & -\sin 1\theta \\ \sin 1\theta & \cos 1\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

よって，$n=1$のとき，等式は成り立つ．

[2]$n=k$のとき，等式が成り立つと仮定すると

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}$$

ここで，$n=k+1$の場合を考えると

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{k+1}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta & -\cos k\theta\sin\theta - \sin k\theta\cos\theta \\ \sin k\theta\cos\theta + \cos k\theta\sin\theta & -\sin k\theta\sin\theta + \cos k\theta\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(k\theta+\theta) & -\sin(k\theta+\theta) \\ \sin(k\theta+\theta) & \cos(k\theta+\theta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(k+1)\theta & -\sin(k+1)\theta \\ \sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{pmatrix}$$

よって，等式は$n=k+1$でも成り立つ．

[1], [2]から，すべての自然数nについて等式は成り立つ．

7.

A，Bは直交行列であるから

${}^tAA = A{}^tA = E$

${}^tBB = B{}^tB = E$

${}^tA$について

${}^t({}^tA){}^tA = A{}^tA = E$

${}^tA{}^t({}^tA) = {}^tAA = E$

よって，${}^tA$は直交行列である．

ABについて

$$\begin{aligned} {}^t(AB)(AB) &= ({}^tB{}^tA)(AB) \\ &= {}^tB({}^tAA)B \\ &= {}^tBEB \\ &= {}^tBB = E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (AB){}^t(AB) &= (AB)({}^tB{}^tA) \\ &= A({}^tBB){}^tA \\ &= AE{}^tA \\ &= A{}^tA = E \end{aligned}$$

よって，ABは直交行列である．

練習問題 1-B

1.

線形変換fを表す行列は

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

線形変換gによる$(x,\ y)$の像を$(x',\ y')$とすると

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

であるから

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x + 0y \\ 0x - y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

よって，線形変換gを表す行列は，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$である．

したがって，$h = f \circ g$より，線形変換hを表す行列は

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\cos 2\theta} & \boldsymbol{\sin 2\theta} \\ \boldsymbol{\sin 2\theta} & \boldsymbol{-\cos 2\theta} \end{pmatrix}$$

2.

（1）$\dfrac{x}{\sqrt{2}} = \dfrac{y}{2\sqrt{2}} = z$より

$x = \sqrt{2}z,\ y = 2\sqrt{2}z$

直線上の任意の点を$\left(\sqrt{2}z,\ 2\sqrt{2}z,\ z\right)$とし，

与えられた行列による像を$(x',\ y',\ z')$とすると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}z \\ 2\sqrt{2}z \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z - 2z \\ z + 2z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 3z \\ z \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{cases} x' = -z \\ y' = 3z \\ z' = z \end{cases}$$

zを消去すると，$\dfrac{x'}{-1} = \dfrac{y'}{3} = z'$

したがって，求める図形は，**直線**$\boldsymbol{\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y}{3} = z}$

（2）$x + y - z = 1$より，$z = -1 + x + y$

直線上の任意の点を$(x,\ y,\ -1 + x + y)$とし，

与えられた行列による像を$(x',\ y',\ z')$とすると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ -1 + x + y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \\ -1 + x + y \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y & \cdots ① \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y & \cdots ② \\ z' = -1 + x + y & \cdots ③ \end{cases}$$

①，②より

$\sqrt{2}x' = x - y$・・・①'

$\sqrt{2}y' = x + y$・・・②'

①'+②'より

$\sqrt{2}x' + \sqrt{2}y' = 2x$

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}x' + \sqrt{2}y'\right) \cdots ④$$

②'−①'より

$\sqrt{2}y' - \sqrt{2}x' = 2y$

$$y = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{2}x' + \sqrt{2}y'\right) \cdots ⑤$$

③に，④，⑤を代入して

$$z' = -1 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}x' + \sqrt{2}y'\right) + \frac{1}{2}\left(-\sqrt{2}x' + \sqrt{2}y'\right)$$

$$= -1 + \sqrt{2}y'$$

したがって，求める図形は，**平面**$\boldsymbol{\sqrt{2}y - z = 1}$

3.

$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$，$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$であるから

$$\triangle \mathrm{OPQ} = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2}|x_1 y_2 - x_2 y_1|$$

また

$$\overrightarrow{\mathrm{OP'}} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 \\ cx_1 + dy_1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP'}} = A\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ax_2 + by_2 \\ cx_2 + dy_2 \end{pmatrix}$$

よって

$$\triangle \mathrm{O'P'Q'} = \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} ax_1 + by_1 & ax_2 + by_2 \\ cx_1 + dy_1 & cx_2 + dy_2 \end{vmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{2}|(ax_1 + by_1)(cx_2 + dy_2) - (ax_2 + by_2)(cx_1 + dy_1)|$$

$$= \frac{1}{2}|acx_1x_2 + adx_1y_2 + bcy_1x_2 + bdy_1y_2$$

$$- (acx_2x_1 + adx_2y_1 + bcy_2x_1 + bdy_2y_1)|$$

$$= \frac{1}{2}|ad(x_1y_2 - x_2y_1) - bc(x_1y_2 - x_2y_1)|$$

$$= \frac{1}{2}|(ad - bc)(x_1y_2 - x_2y_1)|$$

$$= \frac{1}{2}|ad - bc||x_1y_2 - x_2y_1|$$

$$= |ad - bc|\left(\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|\right)$$

$= |ad - bc| \triangle \mathrm{OPQ}$

$|A| > 0$より，$|ad - bc| = |A|$であるから

$\triangle \mathrm{O'P'Q'} = |A|\mathrm{OPQ}$

4.

２点A，Bのfによる像をそれぞれ$\mathrm{A'}$，$\mathrm{B'}$とする．

$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b} - t\boldsymbol{a}$

$\quad = (1 - t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$

であるから，fによる$\boldsymbol{p}$の像は

$f(p) = f\big((1 - t)\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}\big)$

$\quad = f\big((1 - t)\boldsymbol{a}\big) + f(t\boldsymbol{b})$

$\quad = (1 - t)f(\boldsymbol{a}) + tf(\boldsymbol{b})$

（１）$f(\boldsymbol{a})$，$f(\boldsymbol{b})$はそれぞれ，$\mathrm{A'}$，$\mathrm{B'}$の位置ベクトルであるから，$\mathrm{A'}$と$\mathrm{B'}$が一致すれば$(\boldsymbol{a}) = f(\boldsymbol{b})$となる．

よって，$f(\boldsymbol{p}) = (1 - t)f(\boldsymbol{a}) + tf(\boldsymbol{a})$

$\quad = f(\boldsymbol{a})$

したがって，直線lの像は１点$\mathrm{A'}$となる．

（２）$\mathrm{A'}$と$\mathrm{B'}$が一致しなければ

$f(\boldsymbol{p}) = (1 - t)f(\boldsymbol{a}) + tf(\boldsymbol{b})$

は，$\mathrm{A'}$，$\mathrm{B'}$を通る直線のベクトル方程式を表す．

したがって，直線lの像は２点$f(\mathrm{A})$，$f(\mathrm{B})$を通る直線となる．