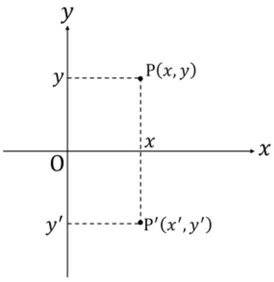
4章　行列の応用

§1　線形変換（p.122〜p.135）

問1



$\begin{cases} \boldsymbol{x' = x} \\ \boldsymbol{y' = -y} \end{cases}$

問2

（1）この変換は,

$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$

と表されるので，**線形変換である**.

変換を表す行列は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

すなわち，$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

（2）この変換は,

$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$

と表されるので，**線形変換である**.

変換を表す行列は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

すなわち，$\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

（3）この変換は,

$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 2 \end{cases}$

と表され，原点$\mathrm{O}(0,\ 0)$を$(1,\ -2)$に移すので,

線形変換ではない.

問3

（1）$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ x - 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

より，$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$

また，点(2，3)の像の座標は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -4 \end{pmatrix}$$

よって，$\boldsymbol{(13,\ -4)}$

（2）$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

より，$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

また，点(2，3)の像の座標は

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

よって，$\boldsymbol{(-3,\ 4)}$

問4

$$A\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

である．ここで,

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

であるから，$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$は正則で,

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{0-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

よって,

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{7} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

問5

線形変換の基本性質より

$$\begin{aligned} f(k\boldsymbol{p} + l\boldsymbol{q}) &= f(k\boldsymbol{p}) + f(l\boldsymbol{q}) \\ &= kf(\boldsymbol{p}) + lf(\boldsymbol{q}) = \text{右辺} \end{aligned}$$

問6

$f(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=f(\boldsymbol{a})+2f(\boldsymbol{b})$

$=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}$

問7

（1）直線$y=x+1$上の任意の点P$(x,\ x+1)$の線形変換による像をP$'(x',\ y')$とおくと

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\x+1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2x-(x+1)\\x+3(x+1)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}x-1\\4x+3\end{pmatrix}$$

よって，$\begin{cases}x'=x-1 & \cdot\cdot\cdot ①\\ y'=4x+3 & \cdot\cdot\cdot ②\end{cases}$

①より，$x=x'+1$

②に代入して

$y'=4(x'+1)+3$

$y'=4x'+7$

したがって，求める図形は，**直線$\boldsymbol{y=4x+7}$**

（2）$2x+y=1$より，$y=-2x+1$

この直線上の任意の点P$(x,\ -2x+1)$の線形変換による像をP$'(x',\ y')$とおくと

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&3\\-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\-2x+1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6x+3(-2x+1)\\-2x-(-2x+1)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$$

よって，$\begin{cases}x'=3\\ y'=-1\end{cases}$

したがって，求める図形は，**点$(\boldsymbol{3},\ \boldsymbol{-1})$**

問8

$f\circ g$を表す行列は

$$\begin{pmatrix}1&1\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+1&0+2\\-2+3&0+6\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{2}\\\mathbf{1}&\mathbf{6}\end{pmatrix}$$

問9

逆変換f^{-1}を表す行列は

$$\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{3-0}\begin{pmatrix}3&0\\-2&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\begin{pmatrix}\mathbf{3}&\mathbf{0}\\\mathbf{-2}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

また，点$(-1,\ 4)$に移されるもとの点の座標は

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&0\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

よって，$(\boldsymbol{-1},\ \boldsymbol{2})$

問10

f^{-1}を表す行列は

$$\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{3-0}\begin{pmatrix}3&-2\\0&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&-2\\0&1\end{pmatrix}$$

よって，点$(1,\ 0)$がf^{-1}によって移される点は

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&-2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

すなわち，$(\boldsymbol{1},\ \boldsymbol{0})$

g^{-1}を表す行列は

$$\begin{pmatrix}2&1\\-4&0\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{0-(-4)}\begin{pmatrix}0&-1\\4&2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0&-1\\4&2\end{pmatrix}$$

よって，点$(1,\ 0)$がg^{-1}によって移される点は

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0&-1\\4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

すなわち，$(\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{1})$

$$f\circ g=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\-4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&1\\-12&0\end{pmatrix}$$

であるから，$(f\circ g)^{-1}$を表す行列は

$$\begin{pmatrix}-6 & 1\\ -12 & 0\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{0-(-12)}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 12 & -6\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 12 & -6\end{pmatrix}$$

よって，点$(1,\ 0)$が$(f\circ g)^{-1}$によって移される点は

$$\frac{1}{12}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 12 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}0\\ 12\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

すなわち，$(\mathbf{0},\ \mathbf{1})$

$\boxed{\text{問 11}}$

fの逆変換f^{-1}を表す行列は

$$\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{6-0}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$3x+y=6$より，$y=-3x+6$

この直線上の任意の点$\mathrm{P}(x,\ -3x+6)$のもとの

座標を$\mathrm{P}'(x',\ y')$とすると

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ -3x+6\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3x\\ -6x+12\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}x\\ -x+2\end{pmatrix}$$

よって，$\begin{cases}x'=\frac{1}{2}x & \cdots\text{①}\\ y'=-x+2 & \cdots\text{②}\end{cases}$

①より，$x=2x'$

これを，②に代入して，

$y'=-2x'+2$

$2x'+y'=2$

したがって，求める図形は，**直線$\boldsymbol{2x+y=2}$**

$\boxed{\text{問 12}}$

$\frac{\pi}{3}$の回転

$$\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}}$$

$\frac{\pi}{2}$の回転

$$\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2}\\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}=\boldsymbol{\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}$$

πの回転

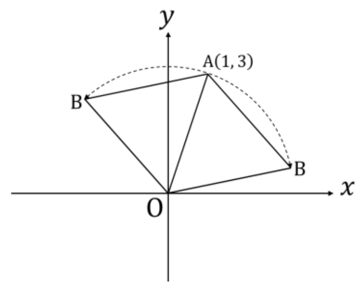
$$\begin{pmatrix}\cos\pi & -\sin\frac{\pi}{2}\\ \sin\pi & \cos\pi\end{pmatrix}=\boldsymbol{\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}}$$

$-\frac{\pi}{4}$の回転

$$\begin{pmatrix}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}}$$

$\boxed{\text{問 13}}$



$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$，$\angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{3}$であるから，点 B は点 A を

原点を中心として，$\frac{\pi}{3}$，または$-\frac{\pi}{3}$回転した点である．

$\frac{\pi}{3}$回転した点は

$$\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

$-\dfrac{\pi}{3}$回転した点は

$$\begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

よって，点 B の座標は

$$\left(\boldsymbol{\frac{1}{2} \mp \frac{3\sqrt{3}}{2}},\ \boldsymbol{\pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}}\right) \quad \textbf{（複号同順）}$$

問 14

（1）与えられた行列の列ベクトルを$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$とおく．

すなわち

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

このとき

$$|\boldsymbol{a}|^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{3}{5}\right)^2$$

$$= \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1$$

$$|\boldsymbol{b}|^2 = \left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2$$

$$= \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right)$$

$$= -\frac{12}{25} + \frac{12}{25} = 0$$

よって，与えられた行列は直交行列である．

（2）与えられた行列の列ベクトルを$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$とおく．

すなわち

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

このとき

$$|\boldsymbol{a}|^2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = 1$$

$$|\boldsymbol{b}|^2 = 0^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

$$|\boldsymbol{c}|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = 1$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot 0 + \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$$

$$\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$$

$$\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = 0$$

よって，与えられた行列は直交行列である．