練習問題 2-A

1. それぞれの行列をAとする．

（１）$|A|=\begin{vmatrix}4 & -5\\ -1 & -3\end{vmatrix}=-12-5=-17$

小行列式を求めると

$D_{11}=-3\quad D_{12}=-1$

$D_{21}=-5\quad D_{22}=4$

以上より

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}D_{11} & -D_{21}\\ -D_{12} & D_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 5\\ 1 & 4\end{pmatrix}$$

よって，$A^{-1}=-\boldsymbol{\frac{1}{17}\begin{pmatrix}-3 & 5\\ 1 & 4\end{pmatrix}}$

（２）$|A|=\begin{vmatrix}0 & 3 & 2\\ 3 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=0+6+6-(0+9+12)$

$=-9$

小行列式を求めると

$D_{11}=\begin{vmatrix}-4 & 3\\ 0 & -1\end{vmatrix}=2\qquad D_{12}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ -2 & -1\end{vmatrix}=1$

$D_{13}=\begin{vmatrix}2 & -4\\ -2 & 0\end{vmatrix}=-3\quad D_{21}=\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}=1$

$D_{22}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{vmatrix}=-4\quad D_{23}=\begin{vmatrix}3 & -4\\ -2 & 0\end{vmatrix}=-6$

$D_{31}=\begin{vmatrix}-4 & 2\\ -4 & 3\end{vmatrix}=-3\qquad D_{32}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-6$

$D_{33}=\begin{vmatrix}3 & -4\\ 2 & -4\end{vmatrix}=-9$

以上より

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}D_{11} & -D_{21} & D_{31}\\ -D_{12} & D_{22} & -D_{32}\\ D_{13} & -D_{23} & D_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -3\\ -1 & -4 & 6\\ -3 & 6 & -9\end{pmatrix}$$

よって，$A^{-1}=-\boldsymbol{\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2 & -1 & -3\\ -1 & -4 & 6\\ -3 & 6 & -9\end{pmatrix}}$

2.

（１）与えられた連立方程式を，行列を用いて表すと

$$\begin{pmatrix}2 & -5\\ 5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$$

ここで，$A=\begin{pmatrix}2 & -5\\ 5 & 2\end{pmatrix}$とすると

$|A|=\begin{vmatrix}2 & -5\\ 5 & 2\end{vmatrix}=4-(-25)=29$

また

$\Delta_1=\begin{vmatrix}1 & -5\\ -2 & 2\end{vmatrix}=2-10=-8$

$\Delta_2=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 5 & -2\end{vmatrix}=-4-5=-9$

よって，クラメルの公式より

$$x=\frac{-8}{29}=-\frac{8}{29},\ y=\frac{-9}{29}=-\frac{9}{29}$$

したがって，$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=\left(-\boldsymbol{\frac{8}{29}},\ -\boldsymbol{\frac{9}{29}}\right)$

（２）与えられた連立方程式を，行列を用いて表すと

$$\begin{pmatrix}1 & 5 & 1\\ 4 & -3 & 6\\ 3 & -2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$$

ここで，$A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 1\\ 4 & -3 & 6\\ 3 & -2 & 4\end{pmatrix}$

$|A|=\begin{vmatrix}1 & 5 & 1\\ 4 & -3 & 6\\ 3 & -2 & 4\end{vmatrix}=-12+90-8-(-12+80-9)$

$=11$

また

$\Delta_1=\begin{vmatrix}0 & 5 & 1\\ 1 & -3 & 6\\ 1 & -2 & 4\end{vmatrix}=0+30-2-(0+20-3)$

$=11$

$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 4 & 1 & 6\\ 3 & 1 & 4\end{vmatrix}=4+0+4-(6+0+3)$

$=-1$

$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 5 & 0\\ 4 & -3 & 1\\ 3 & -2 & 1\end{vmatrix}=-3+15+0-(-2-20+0)$

$=-6$

よって，クラメルの公式より

$$x=\frac{11}{11}=1,\ y=\frac{-1}{11}=-\frac{1}{11},\ z=\frac{-6}{11}=-\frac{6}{11}$$

したがって，$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z})=\left(\boldsymbol{1},\ -\boldsymbol{\frac{1}{11}},\ -\boldsymbol{\frac{6}{11}}\right)$

3.

与えられた３つのベクトルを並べてできる行列式の値が０となればよいので

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & 1 & a \end{vmatrix} = -3a + 8 + 12 - (-2 + 4a + 36)$$
$$= -7a - 14 = 0$$

すなわち，$\boldsymbol{a = -2}$

4.

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

３つのベクトルを並べてできる行列式の値を求めると

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 15 - 4 - (2 - 15 + 12)$$
$$= -24$$

よって，平行六面体の体積は，$|-24| = \mathbf{24}$

5.

４点A，B，C，Dが同じ平面上にあれば，３つのベクトル$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$は線形従属となるから，これら３つのベクトルを並べてできる行列式の値が0となればよい．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ a+3 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 5 & -3 & 2 \\ 5 & a+3 & -2 \end{vmatrix} = 0 - 30 + 20(a+3) - (0 + 30 - 60)$$
$$= -30 + 20a + 60 + 30$$
$$= 20a + 60 = 0$$

したがって，$\boldsymbol{a = -3}$

6.

$\triangle$ABCの面積は，線分AB，ACを隣り合う２辺とする平行四辺形の面積の$\dfrac{1}{2}$である．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

したがって，AB，ACを隣り合う２辺とする平行四辺形の面積は，行列式$\begin{vmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \end{vmatrix}$の絶対値に等しいから

$\triangle$ABC の面積は，$\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \end{vmatrix}$の絶対値に等しい．

一方，

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ a_2 & b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \end{vmatrix}$$

であるから，この値の絶対値は，$\triangle$ABCの面積に等しい．

練習問題 2-B

1.

（１）与えられた連立方程式を，行列を用いて表すと

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$とすると

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

また

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b & b & c \\ c & c & a \\ a & a & b \end{vmatrix} = 0 \quad ※１列 ＝ ２列より$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = |A|$$
$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & c & c \\ c & a & a \end{vmatrix} = 0 \quad ※２列 ＝ ３列より$$

よって，クラメルの公式より

$$x = \frac{0}{|A|} = 0,\ y = \frac{|A|}{|A|} = 1,\ z = \frac{0}{|A|} = 0$$

したがって，$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z}) = (\mathbf{0},\ \mathbf{1},\ \mathbf{0})$

（２）与えられた連立方程式を，行列を用いて表すと

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix}$$とすると

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}=abc\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$=abc\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$=abc\begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$=abc\begin{vmatrix} b-a & c-a \\ (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \end{vmatrix}$$

$$=abc(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix}$$

$$=abc(b-a)(c-a)\{(c+a)-(b+a)\}$$

$$=abc(b-a)(c-a)(c-b)$$

$$=abc(a-b)(b-c)(c-a)$$

また

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & b^2 & c^2 \\ 1 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & b^2-b & c^2-c \\ 0 & b^3-b & c^3-c \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} b^2-b & c^2-c \\ b^3-b & c^3-c \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} b(b-1) & c(c-1) \\ b(b-1)(b+1) & c(c-1)(c+1) \end{vmatrix}$$

$$=bc(b-1)(c-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+1 & c+1 \end{vmatrix}$$

$$=bc(b-1)(c-1)\{(c+1)-(b+1)\}$$

$$=bc(b-1)(c-1)(c-b)$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a & 1 & c \\ a^2 & 1 & c^2 \\ a^3 & 1 & c^3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 1 & c \\ a^2-a & 0 & c^2-c \\ a^3-a & 0 & c^3-c \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} a^2-a & c^2-c \\ a^3-a & c^3-c \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} a(a-1) & c(c-1) \\ a(a-1)(a+1) & c(c-1)(c+1) \end{vmatrix}$$

$$=-ac(a-1)(c-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+1 & c+1 \end{vmatrix}$$

$$=-ac(a-1)(c-1)\{(c+1)-(a+1)\}$$

$$=-ac(a-1)(c-1)(c-a)$$

$$=ac(a-1)(c-1)(a-c)$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ a^2 & b^2 & 1 \\ a^3 & b^3 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ a^2-a & b^2-b & 0 \\ a^3-a & b^3-b & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a^2-a & b^2-b \\ a^3-a & b^3-b \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a(a-1) & b(b-1) \\ a(a-1)(a+1) & b(b-1)(b+1) \end{vmatrix}$$

$$=ab(a-1)(b-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+1 & b+1 \end{vmatrix}$$

$$=ab(a-1)(b-1)\{(b+1)-(a+1)\}$$

$$=ab(a-1)(b-1)(b-a)$$

よって，クラメルの公式より

$$\boldsymbol{x}=\frac{bc(b-1)(c-1)(c-b)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{(b-1)(c-1)}{a(a-b)(a-c)}=\boldsymbol{\frac{(1-b)(1-c)}{a(a-b)(a-c)}}$$

$$\boldsymbol{y}=\frac{ac(a-1)(c-1)(a-c)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{(a-1)(c-1)}{b(b-a)(b-c)}=\boldsymbol{\frac{(1-a)(1-c)}{b(b-a)(b-c)}}$$

$$\boldsymbol{z}=\frac{ab(a-1)(b-1)(b-a)}{abc(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{(a-1)(b-1)}{c(c-b)(c-a)}=\boldsymbol{\frac{(1-a)(1-b)}{c(c-b)(c-a)}}$$

2.

余因子行列の性質より，$A\tilde{A}=|A|E$・・・①であるから

$$|A\tilde{A}|=\left||A|E\right|$$

$$|A||\tilde{A}|=\left||A|E\right|$$

$$=|A|^n|E| \quad ※各行から|A|をくくり出す.$$

$$=|A|^n$$

よって，$|A||\tilde{A}|=|A|^n$・・・②

i）Aが正則のとき，すなわち$|A|\neq 0$のとき

②より，$|\tilde{A}|=\dfrac{|A|^n}{|A|}=|A|^{n-1}$

ii）Aが正則でないとき，すなわち$|A|=0$のとき

①より，$A\tilde{A}=O$・・・①'

1）$A=O$のとき

$\tilde{A}=O$となるから，$|A|=|\tilde{A}|=0$となり，これは

$|\tilde{A}|=|A|^{n-1}$を満たす.

2）$A\neq O$のとき

$|\tilde{A}|\neq 0$と仮定すると，$\tilde{A}$は正則であるから，

逆行列$\tilde{A}^{-1}$が存在する.

①'の両辺に右から$\tilde{A}^{-1}$をかけると

$$A=O\tilde{A}^{-1}$$

$$=O$$

これは，$A\neq O$に矛盾するから，$|\tilde{A}|=0$である.

よって，$|A|=|\tilde{A}|=0$となり，$|\tilde{A}|=|A|^{n-1}$を満たす.

以上より，$|\tilde{A}|=|A|^{n-1}$である.

3.

（１）４点O，A，B，Pが同じ平面上にあるので，３つのベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$は線形従属である．よって，これら３つのベクトルを並べてできる行列式の値は０となる．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\quad \text{より}$$

$$\begin{vmatrix}x & a_1 & b_1\\ y & a_2 & b_2\\ z & a_3 & b_3\end{vmatrix}=0$$

（２）（１）の左辺を第１列に関して展開すると

$$x\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=0$$

すなわち

$$\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}x-\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}y+\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}z=0$$

4.

与えられた連立方程式を整理すると

$$\begin{cases}(2-k)x+y-z=0\\3x+(2-k)y-3z=0\\3x+y-(2+k)z=0\end{cases}$$

この連立方程式を行列を用いて表すと

$$\begin{pmatrix}2-k & 1 & -1\\ 3 & 2-k & -3\\ 3 & 1 & -(2+k)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

係数行列の行列式の値が０となればよいので

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}2-k & 1 & -1\\ 3 & 2-k & -3\\ 3 & 1 & -(2+k)\end{vmatrix}
&=-(2-k)^2(2+k)-9-3\\
&\qquad -\{-3(2-k)-3(2+k)-3(2-k)\}\\
&=-(2-k)^2(2+k)-12+6(2-k)+3(2+k)\\
&=-(2-k)^2(2+k)-12-12-6k+6+3k\\
&=-(2-k)^2(2+k)-3k+6\\
&=-(2-k)^2(2+k)+3(2-k)\\
&=(2-k)\{-(2-k)(2+k)+3\}\\
&=(2-k)\{-(4-k^2)+3\}\\
&=(2-k)(k^2-1)\\
&=(2-k)(k-1)(k+1)=0\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{k=1,\ -1,\ 2}$

i）$k=1$のとき

係数行列は，$\begin{pmatrix}2-1 & 1 & -1\\ 3 & 2-1 & -3\\ 3 & 1 & -2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 3 & 1 & -3\\ 3 & 1 & -3\end{pmatrix}$

となり，これに行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 3 & 1 & -3\\ 3 & 1 & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

よって，$x+y-z=0$，$-2y=0$

すなわち，$y=0$

$x+0-z=0$より，$x=z$であるから，$z=t$とおくと

$(x,\ y,\ z)=(t,\ 0,\ t)$

ii）$k=-1$のとき

係数行列は$\begin{pmatrix}2+1 & 1 & -1\\ 3 & 2+1 & -3\\ 3 & 1 & -2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 3 & 3 & -3\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}$

となるから，これに行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 3 & 3 & -3\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

よって，$3x+y-z=0$，$2y-2z=0$

すなわち，$y=z$

$3x+z-z=0$より，$x=0$となるから，$z=t$とおくと

$(x,\ y,\ z)=(0,\ t,\ t)$

iii）$k=2$のとき

係数行列は，$\begin{pmatrix}2-2 & 1 & -1\\ 3 & 2-2 & -3\\ 3 & 1 & -2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 3 & 0 & -3\\ 3 & 1 & -4\end{pmatrix}$

となるから，これに行基本変形を行うと

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 3 & 0 & -3\\ 3 & 1 & -4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 3 & 0 & -3\\ 3 & 0 & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 3 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$x-y=0$，$3x-3z=0$

よって，$x=y=z$となるから，$z=t$とおくと

$(x,\ y,\ z)=(t,\ t,\ t)$

以上より

$\boldsymbol{k=1}$のとき，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(t,\ 0,\ t)}$

$\boldsymbol{k=-1}$のとき，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(0,\ t,\ t)}$

$\boldsymbol{k=2}$のとき，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(t,\ t,\ t)}$

（$\boldsymbol{t}$は$\boldsymbol{0}$ではない任意の数）