行列式の性質や，行列式の展開を用いて行列式の値を求める場合，ここに示す解法が全てとは限らない．

練習問題 1-A

1.

（1）サラスの方法を用いると

与式 $= 1\cdot 2\cdot 3 + 1\cdot 1\cdot 1 + 5\cdot 2\cdot 2$
$\quad -(1\cdot 1\cdot 2 + 1\cdot 2\cdot 3 + 5\cdot 2\cdot 1)$

$= 27 - 18 = \mathbf{9}$

【別解】

与式 $=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

$= 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & -9 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$

$= 0\cdot(-2) - (-9)\cdot 1$

$= \mathbf{9}$

（2）サラスの方法を用いると

与式 $= 4\cdot 1\cdot 1 + 6\cdot 4\cdot 1 + (-2)\cdot 0\cdot 1$
$\quad -(4\cdot 4\cdot 1 + 6\cdot 0\cdot 1 - 2\cdot 1\cdot 1)$

$= 28 - 14 = \mathbf{14}$

【別解】

与式 $= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 4 & 6 & -2 \end{vmatrix}$

$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -6 \end{vmatrix}$

$= -1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}$

$= -\{1\cdot(-6) - 4\cdot 2\}$

$= -(-14) = \mathbf{14}$

（3）与式 $=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 4 \end{vmatrix}$

$= 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \\ -3 & 4 & 4 \end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & -2 \end{vmatrix}$

$= 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}$

$= 0\cdot(-2) - 2\cdot(-5)$

$= \mathbf{10}$

（4）与式 $=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 11 & -1 \end{vmatrix}$

$= 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & 11 & -1 \end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & 11 & -1 \end{vmatrix}$

$= 1\cdot\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 11 & -1 \end{vmatrix}$

$= (-5)\cdot(-1) - 4\cdot 11$

$= \mathbf{-39}$

2.

（1）与式 $=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ b^2c^2 & c^2a^2-b^2c^2 & a^2b^2-b^2c^2 \end{vmatrix}$

$= 1\cdot\begin{vmatrix} b-a & c-a \\ c^2a^2-b^2c^2 & a^2b^2-b^2c^2 \end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} b-a & c-a \\ c^2(a^2-b^2) & b^2(a^2-c^2) \end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} -(a-b) & -(a-c) \\ c^2(a-b)(a+b) & b^2(a-c)(a+c) \end{vmatrix}$

$= (a-b)(a-c)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ c^2(a+b) & b^2(a+c) \end{vmatrix}$

$= -1\cdot(a-b)(a-c)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c^2(a+b) & b^2(a+c) \end{vmatrix}$

$= -(a-b)(a-c)\{b^2(a+c) - c^2(a+b)\}$

$= (a-b)(c-a)(b^2a + b^2c - c^2a - c^2b)$

$= (a-b)(c-a)\{a(b^2-c^2) + bc(b-c)\}$

$= (a-b)(c-a)\{a(b-c)(b+c) + bc(b-c)\}$

$= (a-b)(c-a)(b-c)\{a(b+c) + bc\}$

$= (a-b)(b-c)(c-a)(ab+ac+bc)$

$= \boldsymbol{(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)}$

（2）与式 $=\begin{vmatrix} a-b & b & b \\ b-a & a & b \\ b-b & b & a \end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} a-b & b & b \\ -(a-b) & a & b \\ 0 & b & a \end{vmatrix}$

$$= (a-b)\begin{vmatrix} 1 & b & b \\ -1 & a & b \\ 0 & b & a \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)\begin{vmatrix} 1 & b & b \\ 0 & a+b & b+b \\ 0 & b & a \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} a+b & 2b \\ b & a \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)\{(a+b)\cdot a - 2b\cdot b\}$$

$$= (a-b)(a^2+ab-2b^2)$$

$$= (a-b)(a-b)(a+2b)$$

$$= \boldsymbol{(a+2b)(a-b)^2}$$

3.

（1）左辺 $= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1-x & -2-x \\ x^2 & 1-x^2 & 4-x^2 \end{vmatrix}$

$$= 1\cdot\begin{vmatrix} 1-x & -(2+x) \\ (1-x)(1+x) & (2+x)(2-x) \end{vmatrix}$$

$$= (1-x)(2+x)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1+x & 2-x \end{vmatrix}$$

$$= (1-x)(2+x)\{1\cdot(2-x)-(-1)\cdot(1+x)\}$$

$$= (1-x)(2+x)(2-x+1+x)$$

$$= 3(1-x)(2+x)$$

よって，$3(1-x)(2+x)=0$より，$\boldsymbol{x=1,\ -2}$

（2）与式 $= \begin{vmatrix} 1-x+4+(-4) & 4 & -4 \\ -3+(1-x)+3 & 1-x & 3 \\ -3+4+(-x) & 4 & -x \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1-x & 4 & -4 \\ 1-x & 1-x & 3 \\ 1-x & 4 & -x \end{vmatrix}$$

$$= (1-x)\begin{vmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 1 & 1-x & 3 \\ 1 & 4 & -x \end{vmatrix}$$

$$= (1-x)\begin{vmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 0 & -3-x & 7 \\ 0 & 0 & 4-x \end{vmatrix}$$

$$= (1-x)\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} -(3+x) & 7 \\ 0 & 4-x \end{vmatrix}$$

$$= (1-x)\{-(3+x)(4-x)-7\cdot 0\}$$

$$= -(1-x)(4-x)(3+x)$$

よって，$-(1-x)(4-x)(3+x)=0$より，

$\boldsymbol{x=1,\ 4,\ -3}$

4.

両辺の行列式をとると，$|AB|=|O|$であるから，

$|A||B|=0$

よって，$|A|=0$，または，$|B|=0$である．

練習問題 1-B

1.

（1）与式 $= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix}$

$$= 1\cdot\begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ (b-a)(b^2+ab+a^2) & (c-a)(c^2+ca+a^2) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b^2+ab+a^2 & c^2+ca+a^2 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)\{(c^2+ca+a^2)-(b^2+ab+a^2)\}$$

$$= (b-a)(c-a)(c^2+ca-b^2-ab)$$

$$= (b-a)(c-a)\{(c-b)a+c^2-b^2\}$$

$$= (b-a)(c-a)\{(c-b)a+(c-b)(c+b)\}$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)(a+c+b)$$

$$= \boldsymbol{(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)}$$

（2）与式 $= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{vmatrix}$

$$= 1\cdot\begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) & (d-a)(d+a) \\ (b-a)(b^2-ba+a^2) & (c-a)(c^2+ca+a^2) & (d-a)(d^2+da+a^2) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+a & c+a & d+a \\ b^2+ba+a^2 & c^2+ca+a^2 & d^2+da+a^2 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+a & c+a-(b+a) & d+a-(b+a) \\ b^2+ba+a^2 & c^2+ca+a^2-(b^2+ba+a^2) & d^2+da+a^2-(b^2+ba+a^2) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} c-b & d-b \\ c^2+ca-b^2-ba & d^2+da-b^2-ba \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} c-b & d-b \\ (c-b)a+(c-b)(c+b) & (d-b)a+(d-b)(d+b) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} c-b & d-b \\ (c-b)(a+c+b) & (d-b)(a+d+b) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+b+c & a+b+d \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\{(a+b+d)-(a+b+c)\}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

$$= \boldsymbol{(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)}$$

2.

左辺 $= \begin{vmatrix} 2b_1 & c_1+3a_1 & 2a_1+3b_1 \\ 2b_2 & c_2+3a_2 & 2a_2+3b_2 \\ 2b_3 & c_2+3a_2 & 2a_3+3b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_1+3a_1 & 2a_1+3b_1 \\ c_2 & c_2+3a_2 & 2a_2+3b_2 \\ c_3 & c_3+3a_3 & 2a_3+3b_3 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 2b_1 & c_1 & 2a_1+3b_1 \\ 2b_2 & c_2 & 2a_2+3b_2 \\ 2b_3 & c_2 & 2a_3+3b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2b_1 & 3a_1 & 2a_1+3b_1 \\ 2b_2 & 3a_2 & 2a_2+3b_2 \\ 2b_3 & 3a_2 & 2a_3+3b_3 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} c_1 & c_1 & 2a_1+3b_1 \\ c_2 & c_2 & 2a_2+3b_2 \\ c_3 & c_3 & 2a_3+3b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & 3a_1 & 2a_1+3b_1 \\ c_2 & 3a_2 & 2a_2+3b_2 \\ c_3 & 3a_3 & 2a_3+3b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2b_1 & c_1 & 2a_1 \\ 2b_2 & c_2 & 2a_2 \\ 2b_3 & c_2 & 2a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2b_1 & c_1 & 3b_1 \\ 2b_2 & c_2 & 3b_2 \\ 2b_3 & c_2 & 3b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2b_1 & 3a_1 & 2a_1 \\ 2b_2 & 3a_2 & 2a_2 \\ 2b_3 & 3a_2 & 2a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2b_1 & 3a_1 & 3b_1 \\ 2b_2 & 3a_2 & 3b_2 \\ 2b_3 & 3a_2 & 3b_3 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} c_1 & c_1 & 2a_1 \\ c_2 & c_2 & 2a_2 \\ c_3 & c_3 & 2a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_1 & 3b_1 \\ c_2 & c_2 & 3b_2 \\ c_3 & c_3 & 3b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & 3a_1 & 2a_1 \\ c_2 & 3a_2 & 2a_2 \\ c_3 & 3a_3 & 2a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & 3a_1 & 3b_1 \\ c_2 & 3a_2 & 3b_2 \\ c_3 & 3a_3 & 3b_3 \end{vmatrix}$$

$$= 2\cdot 2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_2 & a_3 \end{vmatrix} + 2\cdot 3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & b_1 \\ b_2 & c_2 & b_2 \\ b_3 & c_2 & b_3 \end{vmatrix} + 2\cdot 3\cdot 2\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 & a_2 \\ b_3 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} + 2\cdot 3\cdot 3\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & b_1 \\ b_2 & a_2 & b_2 \\ b_3 & a_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$+2\begin{vmatrix} c_1 & c_1 & a_1 \\ c_2 & c_2 & a_2 \\ c_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} c_1 & c_1 & b_1 \\ c_2 & c_2 & b_2 \\ c_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} + 3\cdot 2\begin{vmatrix} c_1 & a_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 & a_3 \end{vmatrix} + 3\cdot 3\begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

※2 つの列が等しい行列式の値は 0 であることを用いて

$$= 4\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_2 & a_3 \end{vmatrix} + 6\cdot 0 + 12\cdot 0 + 18\cdot 0 + 2\cdot 0 + 3\cdot 0 + 6\cdot 0 + 9\begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

※列を 2 回交換

$$= 4\cdot(-1)^2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_2 & c_3 \end{vmatrix} + 9\cdot(-1)^2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= 13\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_2 & c_3 \end{vmatrix} = \text{右辺}$$

3.

（１）与式 $= \begin{pmatrix} 0+a^2+b^2 & 0+0+bc & 0+ca+0 \\ 0+0+bc & a^2+0+c^2 & ab+0+0 \\ 0+ca+0 & ab+0+0 & b^2+c^2+0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a^2+b^2} & \boldsymbol{bc} & \boldsymbol{ca} \\ \boldsymbol{bc} & \boldsymbol{c^2+a^2} & \boldsymbol{ab} \\ \boldsymbol{ca} & \boldsymbol{ab} & \boldsymbol{b^2+c^2} \end{pmatrix}$

（２）$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} = A$とおく．

サラスの方法を用いると

$|A| = 0 + acb + bac - 0 - 0 - 0$

$= 2abc$

（１）より

左辺 $= |A^2|$

$= |A|^2$

$= (2abc)^2 = 4a^2b^2c^2 =$ 右辺

4.

両辺の行列式をとると，$|{}^tA| = |-A|$

ここで

$|{}^tA| = |A|$

$|-A| = (-1)^3|A| = -|A|$

よって，$|A| = -|A|$となるから

$|A| + |A| = 0 \rightarrow 2|A| = 0$、すなわち，$|A| = 0$