3章　行列式

§1　行列式の定義と性質（p.86〜p.99）

$\boxed{問1}$　ここでは，サラスの方法を用いる．

（1）$与式 = 3\cdot 1-(-2)\cdot(-5)$
$= 3-10$
$= \mathbf{-7}$

（2）$与式 = 1\cdot 2\cdot(-1)+0\cdot 1\cdot 1+4\cdot 1\cdot 5$
$-1\cdot 1\cdot 5-0\cdot 1\cdot(-1)-4\cdot 2\cdot 1$
$= -2+0+20-5-0-8$
$= \mathbf{5}$

（3）$与式 = 1\cdot 5\cdot 9+2\cdot 6\cdot 7+3\cdot 4\cdot 8$
$-1\cdot 6\cdot 8-2\cdot 4\cdot 9-3\cdot 5\cdot 7$
$= 45+84+96-48-72-105$
$= \mathbf{0}$

$\boxed{問2}$

（1）$(3,\ 1,\ 4,\ 2)\to(1,\ 3,\ 4,\ 2)$
$\to(1,\ 2,\ 4,\ 3)$
$\to(1,\ 2,\ 3,\ 4)$

よって，**奇順列**

（2）$(5,\ 3,\ 4,\ 1,\ 2)\to(1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 2)$
$\to(1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 3)$
$\to(1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 4)$
$\to(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$

よって，**偶順列**

$\boxed{問3}$

（1）順列$(3,\ 1,\ 4,\ 2)$に対応する項以外は 0 である．

$(3,\ 1,\ 4,\ 2)\to(1,\ 3,\ 4,\ 2)$
$\to(1,\ 2,\ 4,\ 3)$
$\to(1,\ 2,\ 3,\ 4)$

よって，この順列は奇順列であるから，
行列式の値は，$-(2\cdot 5\cdot 1\cdot 3) = \mathbf{-30}$

（2）順列$(2,\ 1,\ 3,\ 4)$と，$(2,\ 1,\ 4,\ 3)$に対応する項以外は 0 である．

$(2,\ 1,\ 3,\ 4)\to(1,\ 2,\ 3,\ 4)$

よって，この順列は奇順列である．

$(2,\ 1,\ 4,\ 3)\to(1,\ 2,\ 4,\ 3)$
$\to(1,\ 2,\ 3,\ 4)$

よって，この順列は偶順列である．

したがって，行列式の値は

$-(2\cdot 3\cdot 9\cdot 3)+(2\cdot 3\cdot 4\cdot 6) = -162+144 = \mathbf{-18}$

$\boxed{問4}$

（1）$与式 = 4\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & -7\end{vmatrix}$
$= 4\{-1\cdot(-7)-1\cdot 2\}$
$= 4\cdot 5 = \mathbf{20}$

（2）$与式 = 1\begin{vmatrix}-3 & -5 & 5\\ 0 & -5 & 2\\ 0 & -6 & 3\end{vmatrix}$
$= 1\cdot(-3)\begin{vmatrix}-5 & 2\\ -6 & 3\end{vmatrix}$
$= -3\{-5\cdot 3-2\cdot(-6)\}$
$= -3\cdot(-3) = \mathbf{9}$

$\boxed{問5}$

（1）$左辺 = a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$

$= a_{11}a_{22}\begin{vmatrix}a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n}\\ 0 & a_{44} & \cdots & a_{4n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$

$= \cdots$

$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = 右辺$

（2）$|E_n| = \underbrace{\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}}_{n次}$

$= 1\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}}_{(n-1)次}$

$= 1\cdot 1\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}}_{(n-2)次}$

$= \cdots$

$= 1^n = 1$

問６

（１）n次の正方行列において，第k行のすべての成分が0であるとすると，第k行から0をくくり出して

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

（２）左辺 $= \begin{vmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{n1} & ca_{n2} & \cdots & ca_{nn} \end{vmatrix}$

$$= c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{n1} & ca_{n2} & \cdots & ca_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= c^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{n1} & ca_{n2} & \cdots & ca_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots$$

$$= c^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$= C^n|A| =$ 右辺

問７

（１）与式 $= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -4 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} -7 & -4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -7 \cdot (-1) - \{(-4) \cdot (-1)\}$$

$$= 7 - 4 = \mathbf{3}$$

（２）与式 $= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -12 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -\{5 \cdot 5 - (-12) \cdot 0\} = \mathbf{-25}$$

問８

（１）与式 $= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & a-x & a-x \\ x & y-x & b-x \end{vmatrix}$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} a-x & a-x \\ y-x & b-x \end{vmatrix}$$

$$= (a-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y-x & b-x \end{vmatrix}$$

$$= (a-x)\{(b-x) - (y-x)\}$$

$$= (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{x})(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{y})$$

（２）与式 $= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$

$$= 1 \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)\{(c+a) - (b+a)\}$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)$$

$$= (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a})$$

問９

${}^tAA = E$の両辺の行列式を求めると

$|{}^tAA| = |E| = 1$

すなわち，$|{}^tAA| = 1$

ここで，$|{}^tA| = |A|$であるから

$|A|^2 = 1$となるので，$|A| = \pm 1$