練習問題 2-A

1.

（１）拡大係数行列を変形すると

$$\left(\begin{array}{ccc|c}4&-2&-3&1\\3&-2&-1&-3\\3&-1&-4&5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-4\\3&-2&-1&-3\\3&-1&-4&5\end{array}\right)$$
$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-4\\0&1&-4&9\\0&2&-7&17\end{array}\right)$$
$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-4\\0&1&-4&9\\0&0&1&-1\end{array}\right)$$

これを方程式にもどすと

$$\begin{cases}x-\ \ y+z=-4\cdots①\\ \quad y-4z=\ \ 9\cdots②\\ \qquad\quad z=-1\cdots③\end{cases}$$

③を②に代入すると

$y-4\cdot(-1)=9$より，$y=5$

これらを①に代入すると

$x-5-1=-4$より，$x=2$

よって，$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z})=(\boldsymbol{2},\ \boldsymbol{5},\ \boldsymbol{-1})$

（２）拡大係数行列を変形すると

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&-3&-1\\1&1&3&2\\1&3&7&4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&-3&-1\\0&3&6&3\\0&5&10&5\end{array}\right)$$
$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&-3&-1\\0&1&2&1\\0&1&2&1\end{array}\right)$$
$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&-3&-1\\0&1&2&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

これを方程式にもどすと

$$\begin{cases}x-2y-3z=-1\cdots①\\ \qquad y+2z=1\quad\cdots②\\ 0x+0y+0z=0\quad\cdots③\end{cases}$$

③はどのようなx，y，zに対しても成り立つから

これを省略し，$z=t$とおくと

②より，$y=1-2t$

これらを①に代入して

$x-2\cdot(1-2t)-3t=-1$

$x-2+4t-3t=-1$

$x=1-t$

よって，$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z})=(\boldsymbol{1-t},\ \boldsymbol{1-2t},\ \boldsymbol{t})$

($\boldsymbol{t}$は任意の数)

2.

（１）連立１次方程式の拡大係数行列は

$\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&0&2\\1&1&-1&1\\-1&4&3&0\end{array}\right)$であるから，これを変形して

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&0&2\\1&1&-1&1\\-1&4&3&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&0&2\\0&-2&-1&-1\\0&7&3&2\end{array}\right)$$
$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&0&2\\0&-2&-1&-1\\0&1&0&-1\end{array}\right)$$
$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&5\\0&0&-1&-3\\0&1&0&-1\end{array}\right)$$
$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&5\\0&1&0&-1\\0&0&1&3\end{array}\right)$$

これより，$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z})=(\boldsymbol{5},\ \boldsymbol{-1},\ \boldsymbol{3})$

（２）$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&0&1&0&0\\1&1&-1&0&1&0\\-1&4&3&0&0&1\end{array}\right)$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&0&1&0&0\\0&-2&-1&-1&1&0\\0&7&3&1&0&1\end{array}\right)$$
$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&0&1&0&0\\0&-2&-1&-1&1&0\\0&7&3&1&0&1\end{array}\right)$$
$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&0&1&0&0\\0&-2&-1&-1&1&0\\0&1&0&-2&3&1\end{array}\right)$$
$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&7&-9&-3\\0&0&-1&-5&7&-2\\0&1&0&-2&3&1\end{array}\right)$$
$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&7&-9&-3\\0&0&1&5&-7&2\\0&1&0&-2&3&1\end{array}\right)$$
$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&7&-9&-3\\0&1&0&-2&3&1\\0&0&1&5&-7&-2\end{array}\right)$$

よって

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{7}&\boldsymbol{-9}&\boldsymbol{-3}\\\boldsymbol{-2}&\boldsymbol{3}&\boldsymbol{1}\\\boldsymbol{5}&\boldsymbol{-7}&\boldsymbol{-2}\end{pmatrix}$$

（３）$A\vec{x}=\vec{b}$より

$\vec{x}=A^{-1}\vec{b}$

$$=\begin{pmatrix}7&-9&-3\\-2&3&1\\5&-7&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}7\cdot2-9\cdot1-3\cdot0\\-2\cdot2+3\cdot1+1\cdot0\\5\cdot2-7\cdot1-2\cdot0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}14-9\\-4+3\\10-7\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}5\\-1\\3\end{pmatrix}$$

よって，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(5,\ -1,\ 3)}$

3.

与えられた等式の両辺の型より，

Xは 3 次の正方行列である．

ここで，$\begin{pmatrix}1&-3&3\\1&-2&1\\-3&3&5\end{pmatrix}=A$，また，$\overrightarrow{x_1}$，$\overrightarrow{x_2}$，$\overrightarrow{x_3}$を

3 次のベクトルとし，$X=(\overrightarrow{x_1}\quad\overrightarrow{x_2}\quad\overrightarrow{x_3})$とすれば，

この等式は，3 つの方程式

$$A\overrightarrow{x_1}=\begin{pmatrix}8\\4\\8\end{pmatrix},\ A\overrightarrow{x_2}=\begin{pmatrix}7\\6\\7\end{pmatrix},\ A\overrightarrow{x_3}=\begin{pmatrix}4\\3\\4\end{pmatrix}$$

を 1 つにまとめたものである．

これらの方程式を同時に解くと

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-3&3&8&7&4\\1&-2&1&4&6&3\\-3&3&5&8&7&4\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-3&3&8&7&4\\0&1&-2&-4&-1&-1\\0&-6&14&32&28&16\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-3&3&8&7&4\\0&1&-2&-4&-1&-1\\0&0&2&8&22&10\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-3&3&8&7&4\\0&1&0&4&21&9\\0&0&2&8&22&10\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-3&3&8&7&4\\0&1&0&4&21&9\\0&0&1&4&11&5\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&8&37&26\\0&1&0&4&21&9\\0&0&1&4&11&5\end{array}\right)$$

よって，$\overrightarrow{x_1}=\begin{pmatrix}8\\4\\4\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{x_2}=\begin{pmatrix}37\\21\\11\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{x_3}=\begin{pmatrix}16\\9\\5\end{pmatrix}$

であるから

$$\boldsymbol{X=\begin{pmatrix}8&37&16\\4&21&9\\4&11&5\end{pmatrix}}$$

4.

（1）拡大係数行列を変形すると

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&-4&-4\\4&12&-1&14\\7&21&-9&10\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&-4&-4\\0&0&15&30\\0&0&19&38\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&-4&-4\\0&0&1&2\\0&0&1&2\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&-4&-4\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

よって，**係数行列も拡大係数行列も階数は 2** である．

（2）（1）より，係数行列と拡大係数行列の階数が

等しいので，この連立方程式は解が存在する．

（1）を連立方程式にもどすと

$$\begin{cases}x+3y-4z=-4\cdot\cdot\cdot①\\\qquad\qquad z=2\quad\cdot\cdot\cdot②\\0x+0y+0z=0\quad\cdot\cdot\cdot③\end{cases}$$

③はどのようなx，y，zに対しても成り立つから，

これは省略する．

②を①に代入すると

$$x+3y-8=-4$$

$$x=-3y+4$$

$y=t$とおくと，$x=4-3t$

よって，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(4-3t,\ t,\ 2)}$ **（tは任意の数）**

練習問題 2-B

1.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&2&-1&1&0&0&0\\-2&0&1&-1&0&1&0&0\\-2&-1&2&-3&0&0&1&0\\4&1&-1&3&0&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&2&-1&1&0&0&0\\0&0&5&-3&2&1&0&0\\0&-1&6&-5&2&0&1&0\\0&1&-9&7&-4&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&2&-1&1&0&0&0\\0&1&-9&7&-4&0&0&1\\0&-1&6&-5&2&0&1&0\\0&0&5&-3&2&1&0&0\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&2&-1&1&0&0&0\\0&1&-9&7&-4&0&0&1\\0&0&-3&2&-2&0&1&1\\0&0&5&-3&2&1&0&0\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&2&-1&1&0&0&0\\0&1&-9&7&-4&0&0&1\\0&0&-3&2&-2&0&1&1\\0&0&5&-3&2&1&0&0\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&2&-1&1&0&0&0\\0&1&-9&7&-4&0&0&1\\0&0&-3&2&-2&0&1&1\\0&0&2&-1&0&1&1&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&-1&-1&-1\\0&1&5&0&-4&7&7&8\\0&0&1&0&-2&2&3&3\\0&0&2&-1&0&1&1&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&-1&-1&-1\\0&1&0&0&6&-3&-8&-7\\0&0&1&0&-2&2&3&3\\0&0&0&-1&4&-3&-5&-5\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&-1&-1&-1\\0&1&0&0&6&-3&-8&-7\\0&0&1&0&-2&2&3&3\\0&0&0&1&-4&3&5&5\end{array}\right)$$

よって，求める逆行列は，$\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{-1}&\mathbf{-1}&\mathbf{-1}\\\mathbf{6}&\mathbf{-3}&\mathbf{-8}&\mathbf{-7}\\\mathbf{-2}&\mathbf{2}&\mathbf{3}&\mathbf{3}\\\mathbf{-4}&\mathbf{3}&\mathbf{5}&\mathbf{5}\end{pmatrix}$

2.

与えられた等式の両辺の型より，

Xは 3 次の正方行列である．

ここで，$\begin{pmatrix}1&-4&-1\\1&0&-1\\-2&0&3\\0&-1&-1\end{pmatrix}=A$，また，$\overrightarrow{x_1}$，$\overrightarrow{x_2}$，$\overrightarrow{x_3}$を

3 次のベクトルとし，$X=(\overrightarrow{x_1}\quad\overrightarrow{x_2}\quad\overrightarrow{x_3})$とすれば，

この等式は，3 つの方程式

$$A\overrightarrow{x_1}=\begin{pmatrix}-8\\-4\\9\\-2\end{pmatrix},\ A\overrightarrow{x_2}=\begin{pmatrix}5\\1\\-1\\0\end{pmatrix},\ A\overrightarrow{x_3}=\begin{pmatrix}7\\3\\-7\\2\end{pmatrix}$$

を 1 つにまとめたものである．

これらの方程式を同時に解くと

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-4&-1&-8&5&7\\1&0&-1&-4&1&3\\-2&0&3&9&-1&-7\\0&-1&-1&-2&0&2\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-4&-1&-8&5&7\\0&4&0&4&-4&-4\\0&-8&1&-7&9&7\\0&-1&-1&-2&0&2\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-4&-1&-8&5&7\\0&1&0&1&-1&-1\\0&-8&1&-7&9&7\\0&-1&-1&-2&0&2\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-4&-1&-8&5&7\\0&1&0&1&-1&-1\\0&0&1&1&1&-1\\0&0&-1&-1&-1&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-4&-1&-8&5&7\\0&1&0&1&-1&-1\\0&0&1&1&1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

よって，係数行列と拡大係数行列の階数はすべて

3 となり等しいので，解が存在する．

第 4 行に関する方程式は恒等式となるので省略し，

さらに消去法を進めると

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-4&-1&-8&5&7\\0&1&0&1&-1&-1\\0&0&1&1&1&-1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&-4&-1&3\\0&1&0&1&-1&-1\\0&0&1&1&1&-1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-3&2&2\\0&1&0&1&-1&-1\\0&0&1&1&1&-1\end{array}\right)$$

よって，$\overrightarrow{x_1}=\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{x_2}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{x_3}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$

であるから

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\mathbf{-3}&\mathbf{2}&\mathbf{2}\\\mathbf{1}&\mathbf{-1}&\mathbf{-1}\\\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{-1}\end{pmatrix}$$

3.

（1）拡大係数行列を変形すると

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&4&2&2\\1&0&1&2&4\\2&-1&5&4&6\\1&1&-2&2&6\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&4&2&2\\0&1&-3&0&2\\0&1&-3&0&2\\0&2&-6&0&4\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&4&2&2\\0&1&-3&0&2\\0&1&-3&0&2\\0&1&-3&0&2\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&4&2&2\\0&1&-3&0&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

よって，**係数行列も拡大係数行列も階数は 2** である．

（2）（1）より，係数行列と拡大係数行列の階数が

等しいので，この連立方程式は解が存在する．

（1）の下 2 行に関する方程式は常に成り立つので

省略し，連立方程式にもどすと

$$\begin{cases}x-y+4z+2w=2\cdot\cdot\cdot①\\\quad y-3z\qquad\ =2\cdot\cdot\cdot②\end{cases}$$

$z=s$とおくと

②より，$y-3s=2$となるので，$y=2+3s$

$y=2+3s$，$z=s$を①に代入すると

$x-(2+3s)+4s+2w=2$

$x-2-3s+4s+2w=2$

$x+s+2w=4$

ここで，$w=t$とおくと

$x+s+2t=4$

$x=4-s-2t$

よって

$$\begin{cases} x = 4 - s - 2t \\ y = 2 + 3s \\ z = s \\ w = t \end{cases} \quad （s,\ t\text{は任意の数}）$$