２章　行列

§2　連立１次方程式と行列（p.71～p.81）

問１

（１）拡大係数行列を変形すると

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&3&2\\2&7&7\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&3&2\\0&1&3\end{array}\right)$$

これを方程式にもどすと

$$\begin{cases}x+3y=2\cdots①\\ \quad\;\; y=3\cdots②\end{cases}$$

②を①に代入すると

$x+9=2$より，$x=-7$

よって，$\boldsymbol{(x,\ y)=(-7,\ 3)}$

（２）拡大係数行列を変形すると

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&-2\\1&2&-3&-11\\3&3&-1&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&-2\\0&1&-2&-9\\0&0&2&8\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&-2\\0&1&-2&-9\\0&0&1&4\end{array}\right)$$

これを方程式にもどすと

$$\begin{cases}x+y-\ z=-2\cdots①\\ \quad y-2z=-9\cdots②\\ \qquad\quad z=4\ \cdots③\end{cases}$$

③を②に代入すると

$y-8=-9$より，$y=-1$

これらを①に代入すると

$x-1-4=-2$

$x-5=-2$

$x=3$

よって，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(3,\ -1,\ 4)}$

問２

（１）拡大係数行列を変形すると

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&3&2\\2&6&4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&3&2\\0&0&0\end{array}\right)$$

これを方程式にもどすと

$$\begin{cases}x+3y=2\cdots①\\ 0x+0y=0\cdots②\end{cases}$$

②はどのようなx，yに対しても成り立つから，

これを省略して

$x+3y=2$

$y=t$とおくと，$x=2-3t$

よって，$\boldsymbol{(x,\ y)=(2-3t,\ t)}$**（$\boldsymbol{t}$は任意の数）**

（２）拡大係数行列を変形すると

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&5&7&4\\1&6&8&1\\-1&-1&-3&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&5&7&4\\0&1&1&-3\\0&4&4&2\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&5&7&4\\0&1&1&-3\\0&0&0&14\end{array}\right)$$

これを方程式に戻すと

$$\begin{cases}x+5y+7z=4\ \cdots①\\ \quad\;\; y+\ z=-3\cdots②\\ 0x+0y+0z=14\cdots③\end{cases}$$

③は，どのようなx，y，zに対しても成り立たない．

したがってこの連立方程式の**解はない．**

問３

（１）$\left(\begin{array}{cc|cc}2&5&1&0\\4&9&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|cc}2&5&1&0\\0&-1&-2&1\end{array}\right)$

$$\to\left(\begin{array}{cc|cc}2&0&-9&5\\0&-1&-2&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-\frac{9}{2}&\frac{5}{2}\\0&1&2&-1\end{array}\right)$$

よって，逆行列は，

$$\begin{pmatrix}-\frac{9}{2}&\frac{5}{2}\\2&-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-9&5\\4&-2\end{pmatrix}}$$

（２）$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\-2&1&1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-2&1&0\\0&2&1&1&0&1\end{array}\right)$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&1&5&-2&1\end{array}\right)$$

よって，逆行列は，

$$\boldsymbol{\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\5&-2&1\end{pmatrix}}$$

（３）$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\-2&-3&1&0&1&0\\2&3&1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&5&2&1&0\\0&-1&-3&-2&0&1\end{array}\right)$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

よって，逆行列は，

$$\boldsymbol{\begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

$\boxed{\text{問}4}$

（1）$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$，$\vec{x} = \begin{pmatrix} z \\ y \\ z \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$とおくと

与えられた方程式は，$A\vec{x} = \vec{b}$と表すことができる．

ここで，Aの逆行列を求めると

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -10 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

よって，$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 10 & 5 & 3 \end{pmatrix}$であるから

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 10 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \\ 10 \cdot (-1) + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -7 + 8 \\ -3 + 4 \\ -10 + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

したがって，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z) = (1,\ 1,\ 0)}$

（2）$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$，$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$とおくと

ここで，Aの逆行列は，（1）より，

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 10 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 10 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 3 \\ 10 \cdot 2 + 5 \cdot 5 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 14 + 20 + 6 \\ 6 + 10 + 3 \\ 20 + 25 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 19 \\ 54 \end{pmatrix}$$

したがって，$\boldsymbol{(x,\ y,\ z) = (40,\ 19,\ 54)}$

$\boxed{\text{問}5}$　それぞれの行列をAとして，消去法を用いる．

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & -3 \\ 4 & 7 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$\mathbf{rank}\boldsymbol{A} = \mathbf{2}$

（2）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

よって，$\mathbf{rank}\boldsymbol{A} = \mathbf{1}$

$\boxed{\text{問}6}$　それぞれの行列をAとして，消去法を用いる．

（1）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

よって，$\mathrm{rank}A = 3$であるから，Aは**正則である．**

（2）$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 \\ -4 & 1 & 7 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ -4 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & -7 \end{pmatrix}$

$$\to \begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 0 & 13 & -13 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 0 & 13 & 13 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって，$\mathrm{rank}A = 2 < 3$であるから，Aは**正則でない．**