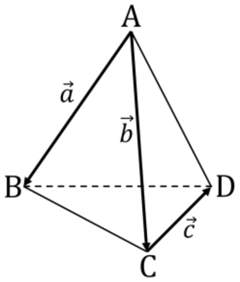
# 練習問題 2-A

**1.**




$\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}}$
$= -\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}}$
$= \boldsymbol{-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}$

**2.**

四角形ABCDが平行四辺形になるためには，
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$となればよい．
点Dの座標を$(x,\ y,\ z)$とすると
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-1,\ 2,\ 6) - (1,\ 4,\ 0)$
$= (-2,\ -2,\ 6)$
$\overrightarrow{\mathrm{DC}} = (5,\ -1,\ 3) - (x,\ y,\ z)$
$= (5-x,\ -1-y,\ 3-z)$
よって

$$\begin{cases} -2 = 5 - x \\ -2 = -1 - y \\ 6 = 3 - z \end{cases}$$

これを解いて，$x = 7$，$y = 1$，$z = -3$
したがって，Dの座標は，$\boldsymbol{(7,\ 1,\ -3)}$

**3.**

３点が一直線上にあれば，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$となる実数$k$が存在する．
$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (a,\ b,\ 8) - (2,\ 3,\ -1)$
$= (a-2,\ b-3,\ 8+1) = (a-2,\ b-3,\ 9)$
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (4,\ -1,\ 5) - (2,\ 3,\ -1)$
$= (4-2,\ -1-3,\ 5+1) = (2,\ -4,\ 6)$
よって，$(a-2,\ b-3,\ 9) = k(2,\ -4,\ 6)$であるから

$$\begin{cases} a - 2 = 2k & \cdots ① \\ b - 3 = -4k & \cdots ② \\ 9 = 6k & \cdots ③ \end{cases}$$

③より，$k = \dfrac{3}{2}$
これを，①，②に代入して
$a = 2\cdot\dfrac{3}{2} + 2 = 5$
$b = -4\cdot\dfrac{3}{2} + 3 = -3$
したがって，$\boldsymbol{a = 5}$，$\boldsymbol{b = -3}$

**4.**

$$\begin{cases} 3\vec{x} + \vec{y} = \vec{a} & \cdots ① \\ 5\vec{x} + 2\vec{y} = \vec{b} & \cdots ② \end{cases}$$とする．

$$\begin{array}{lrl} ①\times 2 & & 6\vec{x} + 2\vec{y} = 2\vec{a} \\ ② & -) & 5\vec{x} + 2\vec{y} = \vec{b} \\ \hline & & \vec{x} \qquad\quad = 2\vec{a} - \vec{b} \end{array}$$

よって，$\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}$

このとき，①より
$\vec{y} = \vec{a} - 3\vec{x}$
$= \vec{a} - 3(2\vec{a} - \vec{b})$
$= \vec{a} - 6\vec{a} + 3\vec{b}$
$= -5\vec{a} + 3\vec{b}$
以上より
$\vec{x} = 2(1,\ -2,\ -3) - (2,\ 3,\ 1)$
$= (2,\ -4,\ -6) - (2,\ 3,\ 1)$
$= (2-2,\ -4-3,\ -6-1)$
$= \boldsymbol{(0,\ -7,\ -7)}$
$\vec{y} = -5(1,\ -2,\ -3) + 3(2,\ 3,\ 1)$
$= (-5,\ 10,\ 15) + (6,\ 9,\ 3)$
$= (-5+6,\ 10+9,\ 15+3)$
$= \boldsymbol{(1,\ 19,\ 18)}$

**5.**

与えられた直線の方向ベクトルを$\vec{v}$とすると
$\vec{v} = (3,\ -1,\ -2)$
求める直線も$\vec{v}$を方向ベクトルとするので
$(x,\ y,\ z) = (5,\ 2,\ -3) + t(3,\ -1,\ -2)$
$= (5+3t,\ 2-t,\ -3-2t)$

よって

$\boldsymbol{x = 5 + 3t,\ y = 2 - t,\ z = -3 - 2t}$（$\boldsymbol{t}$**は実数**）

または，$t$を消去して

$$\boldsymbol{\frac{x-5}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{-2}}$$

6.

与えられた平面の法線ベクトルを$\vec{n}$とすると

$\vec{n} = (a,\ 6,\ -2)$

また，与えられた直線の方向ベクトルを$\vec{v}$とすると

$\vec{v} = (-1,\ 2,\ 5)$

平面と直線が平行となるためには$\vec{n} \perp \vec{v}$,

すなわち，$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$となればよい.

$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot \vec{v} &= a \cdot (-1) + 6 \cdot 2 + (-2) \cdot 5 \\ &= -a + 12 - 10 \\ &= -a + 2 = 0\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{a = 2}$

7.

点$(2,\ -1,\ 6)$を通り，ベクトル$(3,\ 1,\ -1)$に

垂直な平面の方程式は

$3(x-2) + 1(y+1) - 1(z-6) = 0$

整理すると，$3x + y - z + 1 = 0$・・・①

$\dfrac{x}{-2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z}{2} = t$とすると

$x = -2t,\ y = 3t + 2,\ z = 2t$・・・②

これを①に代入すると

$$\begin{aligned}3 \cdot (-2t) + (3t + 2) - 2t + 1 &= 0 \\ -6t + 3t + 2 - 2t + 1 &= 0 \\ -5t &= -3 \\ t &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

②に代入して

$$x = -2 \cdot \frac{3}{5} = -\frac{6}{5}$$

$$y = 3 \cdot \frac{3}{5} + 2 = \frac{19}{5}$$

$$z = 2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$$

よって，交点は$\boldsymbol{\left(-\frac{6}{5},\ \frac{19}{5},\ \frac{6}{5}\right)}$

8.

直線の方程式は

$\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+3}{-1}$・・・①

また，球の方程式は

$(x-4)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 6^2$・・・②

①において，$\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+3}{-1} = t$とおくと

$x = 2t + 4,\ y = 2t + 1,\ z = -t - 3$・・・③

③を②に代入すると

$$\begin{aligned}(2t + 4 - 4)^2 + (2t + 1 - 1)^2 + (-t - 3 + 3)^2 &= 36 \\ (2t)^2 + (2t)^2 + (-t)^2 &= 36 \\ 4t^2 + 4t^2 + t^2 &= 36 \\ 9t^2 &= 36 \\ t^2 &= 4 \\ t &= \pm 2\end{aligned}$$

これを，③に代入すると

i）$t = 2$のとき

$x = 2 \cdot 2 + 4 = 8$

$y = 2 \cdot 2 + 1 = 5$

$z = -2 - 3 = -5$

ii）$t = -2$のとき

$x = 2 \cdot (-2) + 4 = 0$

$y = 2 \cdot (-2) + 1 = -3$

$z = -(-2) - 3 = -1$

よって，交点は，$\boldsymbol{(8,\ 5,\ -5)}$，$\boldsymbol{(0,\ -3,\ -1)}$

## 練習問題 2-B

1.

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$の内積を求めると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} &= \overrightarrow{\mathrm{BC}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BD}}\right) \\ &= \overrightarrow{\mathrm{BC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BD}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{BC}} \cdot \left(-\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right) + \overrightarrow{\mathrm{BC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BD}} \\ &= -\overrightarrow{\mathrm{BC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BD}} \\ &= -\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right| \cos\angle\mathrm{ABC} + \left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right| \cos\angle\mathrm{DBC}\end{aligned}$$

ここで，$\triangle\mathrm{ABC} \equiv \triangle\mathrm{DBC}$より，$\mathrm{BA} = \mathrm{BD}$,

$\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{DBC}$であるから

$\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|$，$\cos\angle\mathrm{ABC} = \cos\angle\mathrm{DBC}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{BC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} = 0$となるので，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$は垂直である.

**2.**

求める平面の方程式を，$ax+by+cz+d=0$・・・①とし，この平面上にある３点を求める．

直線 $x=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+3}{2}$ は，求める平面に含まれるので，点$(0,\ -2,\ -3)$は求める平面上の点である．

同様に，直線 $x+1=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+2}{2}$ も，求める平面に含まれるので，点$(-1,\ 0,\ -2)$も求める平面上の点である．

３点目を求めるために，

$x=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+3}{2}=t$とおくと

$x=t,\ y=2t-2,\ z=2t-3$

となるので，$t=1$とおけば

$x=1$

$y=2-2=0$

$z=2-3=-1$

よって，点$(1,\ 0,\ -1)$も求める平面上の点である．

３点の座標を①に代入して

$$\begin{cases}-2b-3c+d=0 & \cdots ② \\ -a-2c+d=0 & \cdots ③ \\ a-c+d=0 & \cdots ④\end{cases}$$

③+④より，$-3c+2d=0$

これより，$c=\dfrac{2}{3}d$・・・⑤

⑤を，③に代入して

$$-a-2\cdot\frac{2}{3}d+d=0$$

$$-a-\frac{1}{3}d=0$$

$$a=-\frac{1}{3}d$$

⑤を，②に代入して

$$-2b-3\cdot\frac{2}{3}d+d=0$$

$$-2b-d=0$$

$$b=-\frac{1}{2}d$$

以上より，求める平面の方程式は

$$-\frac{1}{3}dx-\frac{1}{2}dy+\frac{2}{3}dz+d=0$$

$d=0$とすると，$a=b=c=0$となるので，$d\neq 0$である．

よって，$-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{2}y+\dfrac{2}{3}z+1=0$

すなわち，$\boldsymbol{2x+3y-4z-6=0}$

**3.**

（１）点Aは平面$\alpha$上にあるので

$3x-2\cdot 0+5z-1=0$，すなわち，$3x+5z=1$

また，点Aは平面$\beta$上にあるので

$3x+0+z-5=0$，すなわち，$3x+z=5$

$\begin{cases}3x+5z=1 \\ 3x+z=5\end{cases}$ を解いて

$\boldsymbol{x=2,\ z=-1}$

（２）平面$\alpha$，$\beta$の法線ベクトルをそれぞれ$\overrightarrow{n_\alpha}$，$\overrightarrow{n_\beta}$とすると

$\overrightarrow{n_\alpha}=(3,\ -2,\ 5)$

$\overrightarrow{n_\beta}=(3,\ 2,\ 1)$

求めるベクトルを，$\vec{x}=(x,\ y,\ z)$とする．

$\vec{x}\perp\overrightarrow{n_\alpha}$であるから，$\vec{x}\cdot\overrightarrow{n_\alpha}=0$

すなわち，$3x-2y+5z=0$・・・①

$\vec{x}\perp\overrightarrow{n_\beta}$であるから，$\vec{x}\cdot\overrightarrow{n_\beta}=0$

すなわち，$3x+2y+z=0$・・・②

①+②より，$6x+6z=0$であるから，$x=-z$

これを，②に代入して

$$3\cdot(-z)+2y+z=0$$

$$-3z+2y+z=0$$

$$2y=2z$$

$$y=z$$

よって，求めるベクトルは，$(-z,\ z,\ z)$

$z=t$とおいて

$\boldsymbol{\vec{x}=t(-1,\ 1,\ 1)}$（**$\boldsymbol{t}$は0でない実数**）

（３）$(-1,\ 1,\ 1)$は求める直線の方向ベクトルであり，この直線は（１）より点$(2,\ 0,\ -1)$を通るので，直線上の任意の点を$(x,\ y,\ z)$とすれば

$$(x,\ y,\ z)=(2,\ 0,\ -1)+t(-1,\ 1,\ 1)$$

$$=(2-t,\ t,\ -1+t)$$

よって

$\begin{cases}\boldsymbol{x=2-t} \\ \boldsymbol{y=t} \\ \boldsymbol{z=-1+t}\end{cases}$ （**$\boldsymbol{t}$は実数**）

**4.**

（１）$xy$平面の方程式は，$z=0$であるから，

これを球の方程式に代入すると

$x^2+y^2+0^2-4x+6y+8\cdot 0-20=0$

$x^2-4x+y^2+6y-20=0$

$(x-2)^2-4+(y+3)^2-9-20=0$

$(x-2)^2+(y+3)^2=33$

よって，$xy$平面上の図形の方程式は

$(x-2)^2+(y+3)^2=\left(\sqrt{33}\right)^2$，$z=0$

したがって

円の**中心は$(\mathbf{2},\ \mathbf{-3},\ \mathbf{0})$，半径は$\sqrt{\mathbf{33}}$**

（２）$x$軸上の点は$(x,\ 0,\ 0)$となるので，$y=0$，$z=0$を球の方程式に代入すると

$x^2+0^2+0^2-4x+6\cdot 0+8\cdot 0-20=0$

$x^2-4x-20=0$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot(-20)}}{1}$$

$=2\pm\sqrt{24}$

$=2\pm 2\sqrt{6}$

よって，球と$x$軸との交点の座標は

$\left(2+2\sqrt{6},\ 0,\ 0\right)$，$\left(2-2\sqrt{6},\ 0,\ 0\right)$

この２点間の距離が，球が$x$軸から切り取る線分の長さとなる．

したがって，$2+2\sqrt{6}-\left(2-2\sqrt{6}\right)=\mathbf{4\sqrt{6}}$

**5.**

題意より

$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，$|\vec{c}|=4$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot 4\cdot\cos\dfrac{\pi}{2}=0$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=4\cdot 4\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}=16\cdot\dfrac{1}{2}=8$

$\vec{c}\cdot\vec{a}=4\cdot 3\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}=12\cdot\dfrac{1}{2}=6$

$\left(\vec{c}-l\vec{a}-m\vec{b}\right)\perp\vec{a}$より，$\left(\vec{c}-l\vec{a}-m\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=0$

であるから

$$\begin{aligned}\vec{c}\cdot\vec{a}-l\vec{a}\cdot\vec{a}-m\vec{b}\cdot\vec{a}&=6-l|\vec{a}|^2-m\cdot 0\\&=6-l\cdot 3^2\\&=6-9l=0\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{l=\dfrac{2}{3}}$

また，$\left(\vec{c}-l\vec{a}-m\vec{b}\right)\perp\vec{b}$より，$\left(\vec{c}-l\vec{a}-m\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=0$

であるから

$$\begin{aligned}\vec{c}\cdot\vec{b}-l\vec{a}\cdot\vec{b}-m\vec{b}\cdot\vec{b}&=8-l\cdot 0-m\left|\vec{b}\right|^2\\&=8-m\cdot 4^2\\&=8-16m=0\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{m=\dfrac{1}{2}}$

**6.**

$l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}=\vec{0}$が成り立つとき

$\vec{a}\cdot\left(l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{0}=0$であるから

$l\vec{a}\cdot\vec{a}+m\vec{a}\cdot\vec{b}+n\vec{a}\cdot\vec{c}=0$

$l|\vec{a}|^2+m\cdot 0+n\cdot 0=0$

$l|\vec{a}|^2=0$

ここで，$\vec{a}\neq\vec{0}$より，$|\vec{a}|\neq 0$なので，$l=0$

同様にして，$\vec{b}\cdot\left(l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}\right)=0$より，

$m\left|\vec{b}\right|^2=0$，$\left|\vec{b}\right|\neq 0$であるから，$m=0$

$\vec{c}\cdot\left(l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}\right)=0$より，

$n|\vec{c}|^2=0$，$|\vec{c}|\neq 0$であるから，$n=0$

以上より，$l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}=\vec{0}$が成り立つとき，

$l=m=n=0$となるので，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$は線形独立である．

**7.**

与えられた方程式を整理すると

$x^2-6x+y^2+2y+z^2-4z+d=0$

$(x-3)^2-9+(y+1)^2-1+(z-2)^2-4+d=0$

$(x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=14-d$

$(x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=\left(\sqrt{14-d}\right)^2$

この方程式で表される図形が球となるのは，

$\sqrt{14-d}>0$のときであるから，$\boldsymbol{d<14}$のとき．

また，このときの円の**中心の座標は$(\mathbf{3},\ \mathbf{-1},\ \mathbf{2})$**

**半径は$\sqrt{\boldsymbol{14-d}}$**