

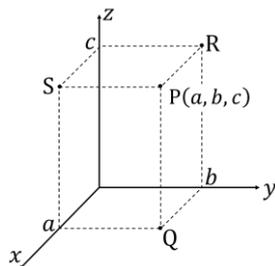
1章 ベクトル

§2 空間のベクトル (p.27~p.45)

問1

それぞれに成分の移動量を加えればよいので、
点Qの座標は、 $(x + a, y + b, z + c)$

問2



図より、 $Q(a, b, 0), R(0, b, c), S(a, 0, c)$

問3

$$\begin{aligned} &\sqrt{(-2-3)^2 + \{1-(-2)\}^2 + (-5-1)^2} \\ &= \sqrt{(-5)^2 + 3^2 + (-6)^2} \\ &= \sqrt{25 + 9 + 36} = \sqrt{70} \end{aligned}$$

問4

$\sqrt{(3-2)^2 + (y-1)^2 + \{-2-(-4)\}^2} = 3$ であるから
 $1^2 + (y-1)^2 + 2^2 = 9$
 これを解くと
 $1 + (y^2 - 2y + 1) + 4 = 9$
 $y^2 - 2y - 3 = 0$
 $(y+1)(y-3) = 0$
 よって、 $y = -1, 3$

問5

(1) 与式 $= (1, 2, -1) + (3, 1, -2)$
 $= (1+3, 2+1, -1+(-2))$
 $= (4, 3, -3)$
 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + (-3)^2}$
 $= \sqrt{16 + 9 + 9}$
 $= \sqrt{34}$

(2) 与式 $= 3(1, 2, -1) - 2(3, 1, -2)$
 $= (3, 6, -3) + (-6, -2, 4)$
 $= (3+(-6), 6+(-2), -3+4)$
 $= (-3, 4, 1)$

$$\begin{aligned} |3\vec{a} - 2\vec{b}| &= \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{9 + 16 + 1} \\ &= \sqrt{26} \end{aligned}$$

問6

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= (7, -3, 3) - (4, 3, 1) \\ &= (7-4, -3-3, 3-1) \\ &= (3, -6, 2) \\ \vec{CD} &= (-6, 4, -2) - (-3, -2, 0) \\ &= (-6-(-3), 4-(-2), -2-0) \\ &= (-3, 6, -2) \end{aligned}$$

この結果より、 $\vec{CD} = -\vec{AB}$ であるから、 $\vec{AB} // \vec{CD}$
 また、 $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$
 以上より、 $AB // CD, AB = CD$ であるから、
 四角形ABCDは平行四辺形である。

問7

(1) 求める座標は
 $\left(\frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 5}{2+1}, \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2)}{2+1}, \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 1}{2+1} \right)$
 $= \left(\frac{2+10}{3}, \frac{1-4}{3}, \frac{4+2}{3} \right)$
 $= \left(\frac{12}{3}, \frac{-3}{3}, \frac{6}{3} \right)$
 $= (4, -1, 2)$

(2) 求める座標は
 $\left(\frac{3 \cdot 2 + 2 \cdot 5}{2+3}, \frac{3 \cdot 1 + 2 \cdot (-2)}{2+3}, \frac{3 \cdot 4 + 2 \cdot 1}{2+3} \right)$
 $= \left(\frac{6+10}{5}, \frac{3-4}{5}, \frac{12+2}{5} \right)$
 $= \left(\frac{16}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{14}{5} \right)$

問8

(1) Gの位置ベクトルを \vec{g} とすると

$$\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

(2) 点Pの位置ベクトルは

$$\frac{1\vec{d} + 3\vec{g}}{3+1} = \frac{\vec{d} + 3 \cdot \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}}{4}$$

$$= \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{4}$$

問9

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-2)$$

$$= 6 + 1 - 6 = 1$$

$$(2) \vec{a} \cdot \vec{b} = -3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + 5 \cdot (-3)$$

$$= 6 + 2 - 15 = -7$$

問10 \vec{a} と \vec{b} のなす角を θ とする。

$$(1) \cos \theta = \frac{\sqrt{2} \cdot 1 + 2 \cdot \sqrt{2} + 3\sqrt{2} \cdot 1}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + 2^2 + (3\sqrt{2})^2} \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{\sqrt{2+4+18} \sqrt{1+2+1}}$$

$$= \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{24}\sqrt{4}}$$

$$= \frac{6\sqrt{2}}{2\sqrt{6} \cdot 2}$$

$$= \frac{6\sqrt{2} \times \sqrt{6}}{4\sqrt{6} \times \sqrt{6}}$$

$$= \frac{6\sqrt{12}}{24}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0 \leq \theta \leq \pi \text{より, } \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$(2) \cos \theta = \frac{2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2}}$$

$$= \frac{-2 - 1 + 0}{\sqrt{4+1+4} \sqrt{1+1+0}}$$

$$= \frac{-3}{\sqrt{9}\sqrt{2}}$$

$$= \frac{-3}{3\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$0 \leq \theta \leq \pi \text{より, } \theta = \frac{3}{4}\pi$$

問11

(1) $\vec{a} \perp \vec{b}$ より, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ であるから

$$2 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot k = 0$$

これを解くと

$$-4 + 2 - k = 0$$

$$k = -2$$

(2) 求める単位ベクトルを $\vec{c} = (x, y, z)$ とする。

また, (1)より, $\vec{b} = (-2, 1, -2)$

$$|\vec{c}| = 1 \text{より, } x^2 + y^2 + z^2 = 1 \cdots \textcircled{1}$$

$\vec{a} \perp \vec{c}$ より, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ であるから,

$$2x + 2y - z = 0 \cdots \textcircled{2}$$

$\vec{b} \perp \vec{c}$ より, $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ であるから,

$$-2x + y - 2z = 0 \cdots \textcircled{3}$$

②+③より, $3y - 3z = 0$, すなわち, $y = z \cdots \textcircled{4}$

これを, ②に代入して

$$2x + 2z - z = 0$$

$$2x = -z, \text{ すなわち, } x = -\frac{1}{2}z \cdots \textcircled{5}$$

これらを①に代入して

$$\left(-\frac{1}{2}z\right)^2 + z^2 + z^2 = 1$$

$$\frac{1}{4}z^2 + 2z^2 = 1$$

$$z^2 + 8z^2 = 4$$

$$9z^2 = 4$$

$$z^2 = \frac{4}{9}$$

$$z = \pm \frac{2}{3}$$

$$\textcircled{4} \text{より, } y = z = \pm \frac{2}{3}$$

$$\textcircled{5} \text{より, } x = -\frac{1}{2}z = \mp \frac{1}{3}$$

よって, 求める単位ベクトルは,

$$\left(\mp \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{2}{3}\right) = \pm \frac{1}{3}(1, -2, -2)$$

問12

(1) 正四面体の各面は正三角形だから

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = |\overline{OA}| |\overline{OB}| \cos \angle AOB$$

$$= r \cdot r \cdot \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= r^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} r^2$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OC}| \cos \angle AOC$$

$$= r \cdot r \cdot \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= r^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} r^2$$

$$\begin{aligned} (2) \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) \\ &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \\ &= \frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{2} r^2 = 0 \end{aligned}$$

よって、 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{BC}$ である。

問13 t は実数。

(1) 直線上の点の座標を (x, y, z) とすると

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (3, 1, 4) + t(2, 1, -3) \\ &= (3 + 2t, 1 + t, 4 - 3t) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 4 - 3t \end{cases}$$

または、 t を消去して

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-4}{-3}$$

(2) 直線上の点の座標を (x, y, z) とし、

$(5, 2, 4) - (1, -3, 2) = (4, 5, 2)$ を方向ベクトル、
通る点を $(1, -3, 2)$ とすると

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (1, -3, 2) + t(4, 5, 2) \\ &= (1 + 4t, -3 + 5t, 2 + 2t) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -3 + 5t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

または、 t を消去して

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-2}{2}$$

問14

直線 $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-6} = \frac{z-3}{2\sqrt{2}}$ の方向ベクトルを \vec{v}_1 とすると

$$\vec{v}_1 = (2, -6, 2\sqrt{2})$$

直線 $\frac{x+3}{-1} = y+2 = \frac{z-1}{-\sqrt{2}}$ の方向ベクトルを \vec{v}_2 とすると

$$\vec{v}_2 = (-1, 1, -\sqrt{2})$$

\vec{v}_1 と \vec{v}_2 のなす角を θ とすれば

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{2 \cdot (-1) + (-6) \cdot 1 + 2\sqrt{2} \cdot (-\sqrt{2})}{\sqrt{2^2 + (-6)^2 + (2\sqrt{2})^2} \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-\sqrt{2})^2}} \\ &= \frac{-2 - 6 - 4}{\sqrt{4 + 36 + 8} \sqrt{1 + 1 + 2}} \\ &= \frac{-12}{4\sqrt{3} \cdot 2} \\ &= \frac{-3 \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}} \\ &= -\frac{3\sqrt{3}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ より、 $\theta = 150^\circ$

したがって、2直線のなす角は、 $180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$

問15

直線 l_1 の方向ベクトルを \vec{v}_1 とすると

$$\vec{v}_1 = (3, -5, 2)$$

直線 l_2 の方向ベクトルを \vec{v}_2 とすると

$$\vec{v}_2 = (k, 2, -4)$$

\vec{v}_1 と \vec{v}_2 が直交すればよいので、 $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$ となればよい。

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 &= 3 \cdot k + (-5) \cdot 2 + 2 \cdot (-4) \\ &= 3k - 10 - 8 \\ &= 3k - 18 = 0 \end{aligned}$$

これより、 $k = 6$

問16

(1) 平面上の点の座標を (x, y, z) 、点 $(3, 1, -2)$ をA、
 $\vec{n} = (1, 2, -2)$ とする。

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{AP} \text{であるから、} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

$$\overrightarrow{AP} = (x, y, z) - (3, 1, -2) = (x-3, y-1, z+2)$$

であるから

$$\begin{aligned} 1(x-3) + 2(y-1) - 2(z+2) &= 0 \\ x-3 + 2y-2 - 2z-4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{よって、} x + 2y - 2z - 9 = 0$$

(2) 平面 $2x - 3y + 2z = 1$ の法線ベクトルの1つは、

$(2, -3, 2)$ であり、求める平面もこれを法線ベクトル
とするので、平面上の点の座標を (x, y, z) 、

点 $(2, -2, 1)$ をA、 $\vec{n} = (2, -3, 2)$ とすると、

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{AP} \text{であるから、} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

$$\overrightarrow{AP} = (x, y, z) - (2, -2, 1) = (x-2, y+2, z-1)$$

であるから

$$\begin{aligned} 2(x-2) - 3(y+2) + 2(z-1) &= 0 \\ 2x - 4 - 3y - 6 + 2z - 2 &= 0 \end{aligned}$$

よって、 $2x - 3y + 2z - 12 = 0$

(3) 求める平面の方程式を $ax + by + cz + d$ とおく.

与えられた3点を通ることから

$$\begin{cases} 2a + b + d = 0 & \dots \textcircled{1} \\ -a + 3c + d = 0 & \dots \textcircled{2} \\ b + c + d = 0 & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

①+②×2より、 $b + 6c + 3d = 0 \dots \textcircled{4}$

④-③より、 $5c + 2d = 0$

これより、 $c = -\frac{2}{5}d \dots \textcircled{5}$

⑤を③に代入して、 $b - \frac{2}{5}d + d = 0$

これより、 $b = -\frac{3}{5}d \dots \textcircled{6}$

⑥を①に代入して、 $2a - \frac{3}{5}d + d = 0$

これより、 $a = -\frac{1}{5}d \dots \textcircled{7}$

⑤, ⑥, ⑦より、求める方程式は

$$-\frac{1}{5}dx - \frac{3}{5}dy - \frac{2}{5}dz + d = 0 \dots \textcircled{8} \text{となる.}$$

ここで、 $d = 0$ とすると、 $a = b = c = 0$ となるから、 $d \neq 0$ である.

⑧の両辺を d で割って

$$-\frac{1}{5}x - \frac{3}{5}y - \frac{2}{5}z + 1 = 0$$

よって、 $x + 3y + 2z - 5 = 0$

$$= \frac{6}{2\sqrt{3} \cdot 2}$$

$$= \frac{3 \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times 3}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ より、 $\theta = 30^\circ$

よって、2平面のなす角は 30°

問 18

平面 $x + 2y + kz - 3 = 0$ の法線ベクトルの1つは、

$(1, 2, k)$

平面 $x + (k + 2)y - 3z - 5 = 0$ の法線ベクトルの1つは、

$(1, k + 2, -3)$

2平面が垂直のとき、これらの2つの法線ベクトルも垂直となるので、内積が0となる.

よって、 $1 \cdot 1 + 2 \cdot (k + 2) + k \cdot (-3) = 0$

これを解いて

$$1 + 2k + 4 - 3k = 0$$

$$k = 5$$

問 19

$$(1) \frac{|2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 3|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{|3|}{\sqrt{4 + 9 + 1}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{14}}$$

$$(2) \frac{|2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 3|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{|-2 + 6 - 1 + 3|}{\sqrt{4 + 9 + 1}}$$

$$= \frac{|6|}{\sqrt{14}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{14}}$$

$$(3) \frac{|2 \cdot (-3) + 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 + 3|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{|-6 - 6 - 1 + 3|}{\sqrt{4 + 9 + 1}}$$

$$= \frac{|-10|}{\sqrt{14}}$$

$$= \frac{10}{\sqrt{14}}$$

問 20

$$(1) (x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 2)^2 = (\sqrt{3})^2$$

よって、 $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 3$

問 17

平面 $3x + \sqrt{2}y + z - 6 = 0$ の法線ベクトルの1つは、

$(3, \sqrt{2}, 1)$

平面 $x + \sqrt{2}y + z - 5 = 0$ の法線ベクトルの1つは、

$(1, \sqrt{2}, 1)$

これら2つの法線ベクトルのなす角を θ とすると

$$\cos \theta = \frac{3 \cdot 1 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + 1 \cdot 1}{\sqrt{3^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2}}$$

$$= \frac{3 + 2 + 1}{\sqrt{9 + 2 + 1} \sqrt{1 + 2 + 1}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{12} \sqrt{4}}$$

$$(2) (x-2)^2 + \{y - (-1)\}^2 + \{z - (-3)\}^2 = 2^2$$

よって、 $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = 4$

問 21

(1) 半径を r とすると、求める球の方程式は、

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \text{ と表すことができる.}$$

この球が点(1, -2, 1)を通るので

$$1^2 + (-2)^2 + 1^2 = r^2$$

$$1 + 4 + 1 = r^2$$

よって、 $r^2 = 6$

したがって、 $x^2 + y^2 + z^2 = 6$

(2) 半径を r とすると、求める球の方程式は、

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = r^2 \text{ と表すことができる.}$$

この球が点(5, -1, 3)を通るので

$$(5-2)^2 + (-1+3)^2 + (3-1)^2 = r^2$$

$$9 + 4 + 4 = r^2$$

よって、 $r^2 = 17$

したがって、 $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 17$

(3) 中心の座標は、与えられた2点の midpoint だから

$$\left(\frac{2+0}{2}, \frac{-3+1}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = (1, -1, 1)$$

また、半径は、与えられた2点を結ぶ線分の長さの

$\frac{1}{2}$ であるから

$$\frac{1}{2}\sqrt{(0-2)^2 + (1+3)^2 + (3+1)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4 + 16 + 16}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{36} = \frac{6}{2} = 3$$

よって、 $(x-1)^2 + \{y - (-1)\}^2 + (z-1)^2 = 3^2$

すなわち、 $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 9$

問 22

(1) $x^2 - 2x + y^2 + 6y + z^2 + 4z - 2 = 0$

$$(x-1)^2 - 1 + (y+3)^2 - 9 + (z+2)^2 - 4 - 2 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z+2)^2 = 16$$

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z+2)^2 = 4^2$$

よって、中心は、(1, -3, -2), 半径は、4

(2) $x^2 + 2x + y^2 - 6y + z^2 - 2 = 0$

$$(x+1)^2 - 1 + (y-3)^2 - 9 + z^2 - 2 = 0$$

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 12$$

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = (2\sqrt{3})^2$$

よって、中心は、(-1, 3, 0), 半径は、 $2\sqrt{3}$

(3) 両辺を2倍して

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$$

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 6z = 0$$

$$(x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 + (z-3)^2 - 9 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = (\sqrt{14})^2$$

よって、中心は、(1, 2, 3), 半径は、 $\sqrt{14}$

問 23

交点Qは直線BG上にあるので、 $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{BG}$ と

表すことができるので

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + t(\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OB})$$

$$= \overrightarrow{OB} + t\left(\frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{4} - \overrightarrow{OB}\right)$$

$$= \overrightarrow{OB} + t\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{3}{4}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OC}\right)$$

$$= \frac{t}{4}\overrightarrow{OA} + \left(1 - \frac{3t}{4}\right)\overrightarrow{OB} + \frac{t}{4}\overrightarrow{OC} \dots \textcircled{1}$$

また、点Qは平面OAC上にあるので、

$$\overrightarrow{OQ} = l\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OC} \dots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$\frac{t}{4}\overrightarrow{OA} + \left(1 - \frac{3t}{4}\right)\overrightarrow{OB} + \frac{t}{4}\overrightarrow{OC} = l\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OC}$$

\overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OC} は線形独立なので

$$\begin{cases} \frac{t}{4} = l & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - \frac{3t}{4} = 0 & \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{t}{4} = m & \dots \textcircled{5} \end{cases}$$

④より、 $\frac{3t}{4} = 1$ であるから、 $t = \frac{4}{3}$

これを、③, ⑤に代入して

$$l = m = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$$

したがって、②より

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{3}$$