練習問題 1-A

1.

（1）$3\vec{a}+3\vec{b}+3\vec{x}=5\vec{b}$

$3\vec{x}=5\vec{b}-3\vec{a}-3\vec{b}$

$3\vec{x}=-3\vec{a}+2\vec{b}$

$\vec{x}=\boldsymbol{\frac{2}{3}\vec{b}-\vec{a}}$

（2）$-3\vec{x}-\vec{x}=-3\vec{b}-2\vec{a}$

$-4\vec{x}=-2\vec{a}-3\vec{b}$

$\vec{x}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}}$

2.

題意より

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot4\cdot\cos\frac{2}{3}\pi$

$=3\cdot4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-6$

したがって

$\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|^2=|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\left|\vec{b}\right|^2$

$=3^2+4\cdot(-6)+4\cdot4^2$

$=9-24+64=49$

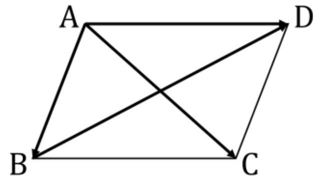
$\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|\geqq0$であるから，$\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|=\sqrt{49}=\boldsymbol{7}$

3.

平行四辺形ABCDにおいて

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}$



よって

左辺$=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2+\left|-\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2$

$=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2$

$+\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2$

$=2\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2+2\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2$

$=2\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2\right)$=右辺

4.

$\vec{a}+\vec{b}=(4+x,\ 3+(-2))=(4+x,\ 1)$

$\vec{a}-\vec{b}=(4-x,\ 3-(-2))=(4-x,\ 5)$

（1）$(\vec{a}+\vec{b})\,//\,(\vec{a}-\vec{b})$となるとき，$(\vec{a}+\vec{b})=k(\vec{a}-\vec{b})$

を満たす実数kが存在する．成分で表せば

$(4+x,\ 1)=k(4-x,\ 5)$

すなわち

$$\begin{cases}4+x=k(4-x) & \cdots① \\ 1=5k & \cdots②\end{cases}$$

②より，$k=\frac{1}{5}$

①に代入して

$4+x=\frac{1}{5}(4-x)$

$20+5x=4-x$

$6x=-16$

$x=\boldsymbol{-\frac{8}{3}}$

（2）$(\vec{a}+\vec{b})\,//\,(\vec{a}-\vec{b})$となるとき，

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$が成り立つから

$(4+x)(4-x)+1\cdot5=0$

$16-x^2+5=0$

$x^2=21$

$x=\pm\boldsymbol{\sqrt{21}}$

【別解】

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$より，$|\vec{a}|^2-\left|\vec{b}\right|^2=0$

すなわち，$|\vec{a}|^2=\left|\vec{b}\right|^2$であるから

$(4^2+3^2)=\{x^2+(-2)^2\}$

$25=x^2+4$

$x^2=21$

$x=\pm\boldsymbol{\sqrt{21}}$

5.

題意より

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{2}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}$$

よって

$$\text{右辺}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{2}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}$$

$$=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}$$

$$=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}$$

$$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\text{左辺}$$

6.

$x=1-3t$より，$t=\dfrac{x-1}{-3}$

$y=-2+2t$より，$t=\dfrac{y+2}{2}$

２式からtを消去して，$\boldsymbol{\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y+2}{2}}$

または，これを整理して

$-2(x-1)=3(y+2)$

$-2x+2=3y+6$

$\boldsymbol{2x+3y+4=0}$

7.

（１）$\boldsymbol{(1,\ -2)}$

（２）直線l_1は，点$\mathrm{P}(2,\ -1)$を通り，$(1,\ -2)$を方向ベクトルとする直線であるから，直線l_1上の任意の点を$(x,\ y)$とすれば

$(x,\ y)=(2,\ -1)+t(1,\ -2)$

すなわち，$\boldsymbol{x=2+t,\ y=-1-2t}$・・・①

（３）交点の座標を$(x,\ y)$とすれば，この点はlおよび，l_1上にあるから，$x-2y+1=0$・・・②と①を満たす.

①を②に代入して

$(2+t)-2(-1-2t)+1=0$

$2+t+2+4t+1=0$

$5t=-5$

$t=-1$

これを，①に代入して

$x=2+(-1)=1$

$y=-1-2\cdot(-1)=1$

よって，交点の座標は$\boldsymbol{(1,\ 1)}$

8.

（１）$\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$とおくと

$(4,\ 6)=m(1,\ 2)+n(3,\ 7)$

$=(m+3n,\ 2m+7n)$

よって

$$\begin{cases}4=m+3n & \cdots ①\\ 6=2m+7n & \cdots ②\end{cases}$$

①より，$m=4-3n$・・・①'

これを②に代入して

$6=2(4-3n)+7n$

$6=8-6n+7n$

$n=-2$

これを①'に代入して

$m=4-3\cdot(-2)$

$=4+6=10$

よって，$\boldsymbol{\vec{c}=10\vec{a}-2\vec{b}}$

（２）$\vec{a}=k\vec{b}+l\vec{c}$とおくと

$(1,\ 2)=k(3,\ 7)+l(4,\ 6)$

$=(3k+4l,\ 7k+6l)$

よって

$$\begin{cases}1=3k+4l & \cdots ①\\ 2=7k+6l & \cdots ②\end{cases}$$

$$\begin{array}{lrl} ①\times 3 & & 3=\ \ 9k+12l \\ ③\times 2 & -) & 4=14k+12l \\ \hline & & -1=-5k \end{array}$$

$k=\dfrac{1}{5}$

これを①に代入して

$1=3\cdot\dfrac{1}{5}+4l$

$5=3+20l$

$20l = 2$

$$l = \frac{1}{10}$$

よって，$\boldsymbol{\vec{a}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\boldsymbol{\vec{b}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}\boldsymbol{\vec{c}}$

【別解】

（1）より，$\vec{c} = 10\vec{a} - 2\vec{b}$であるから

$$10\vec{a} = 2\vec{b} + \vec{c}$$

$$\boldsymbol{\vec{a}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\boldsymbol{\vec{b}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}\boldsymbol{\vec{c}}$$

練習問題 1-B

1.

（1）$\cos\alpha = \dfrac{\boldsymbol{\vec{a}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{OD}}}{|\boldsymbol{\vec{a}}||\overrightarrow{\mathbf{OD}}|}$

（2）Dは辺ABを$|\vec{a}| : |\vec{b}|$に内分する点なので

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{|\boldsymbol{\vec{b}}|\boldsymbol{\vec{a}} + |\boldsymbol{\vec{a}}|\boldsymbol{\vec{b}}}{|\boldsymbol{\vec{a}}| + |\boldsymbol{\vec{b}}|}$$

（3）
$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{\vec{a} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OD}}}{|\vec{a}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}|} \\
&= \frac{1}{|\vec{a}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}|}\left\{\vec{a} \cdot \left(\frac{|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}\right)\right\} \\
&= \frac{\vec{a} \cdot (|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b})}{|\vec{a}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}|(|\vec{a}| + |\vec{b}|)} \\
&= \frac{|\vec{b}||\vec{a}|^2 + |\vec{a}|\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}|(|\vec{a}| + |\vec{b}|)} \\
&= \frac{|\vec{a}|(|\vec{a}||\vec{b}| + \vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{a}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}|(|\vec{a}| + |\vec{b}|)} \\
&= \frac{|\vec{a}||\vec{b}| + \vec{a} \cdot \vec{b}}{|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|(|\vec{a}| + |\vec{b}|)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos\beta &= \frac{\vec{b} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OD}}}{|\vec{b}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}|} \\
&= \frac{1}{|\vec{b}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}|}\left\{\vec{b} \cdot \left(\frac{|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}\right)\right\} \\
&= \frac{\vec{b} \cdot (|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b})}{|\vec{b}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}|(|\vec{a}| + |\vec{b}|)} \\
&= \frac{|\vec{b}|\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}||\vec{b}|^2}{|\vec{b}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}|(|\vec{a}| + |\vec{b}|)} \\
&= \frac{|\vec{b}|(|\vec{a}||\vec{b}| + \vec{a} \cdot \vec{b})}{|b||\overrightarrow{\mathrm{OD}}|(|\vec{a}| + |\vec{b}|)} \\
&= \frac{|\vec{a}||\vec{b}| + \vec{a} \cdot \vec{b}}{|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|(|\vec{a}| + |\vec{b}|)}
\end{aligned}$$

よって，$\cos\alpha = \cos\beta$である．

また，$0 < \alpha < \pi$，$0 < \beta < \pi$であるから，$\alpha = \beta$

2.

A，B，Cの位置ベクトルをそれぞれ$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$とおくと，△ABCの重心の位置ベクトルは

$$\frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

ここで，L，M，Nの位置ベクトルをそれぞれ$\vec{l}$，$\vec{m}$，$\vec{n}$とすると

$$\vec{l} = \frac{1\vec{b} + 3\vec{c}}{3 + 1} = \frac{\vec{b} + 3\vec{c}}{4}$$

$$\vec{m} = \frac{1\vec{c} + 3\vec{a}}{3 + 1} = \frac{\vec{c} + 3\vec{a}}{4}$$

$$\vec{n} = \frac{1\vec{a} + 3\vec{b}}{3 + 1} = \frac{\vec{a} + 3\vec{b}}{4}$$

よって，△LMNの重心の位置ベクトルは

$$\begin{aligned}
\frac{\vec{l} + \vec{m} + \vec{n}}{3} &= \frac{1}{3}\left(\frac{\vec{b} + 3\vec{c}}{4} + \frac{\vec{c} + 3\vec{a}}{4} + \frac{\vec{a} + 3\vec{b}}{4}\right) \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{\vec{b} + 3\vec{c} + \vec{c} + 3\vec{a} + \vec{a} + 3\vec{b}}{4} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{4(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})}{4} \\
&= \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}
\end{aligned}$$

したがって，△ABCと△LMNの重心は一致する．

3.

（1）
$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta)^2} \\
&= \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta} \\
&= \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1 - \cos^2\theta)} \\
&= \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\theta} \\
&= \sqrt{(|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta)^2} \\
&= \left||\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\right|
\end{aligned}$$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$より，$\sin\theta > 0$であるから，$|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta > 0$

よって，$\left||\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\right| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta =$右辺

（2）$S = \dfrac{1}{2}\mathrm{OA} \cdot \mathrm{OB}\sin\theta$

$$= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2\left|\vec{b}\right|^2 - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2} \qquad （1）より$$

（3）$|\vec{a}|^2 = {a_1}^2 + {a_2}^2$

$\left|\vec{b}\right|^2 = {b_1}^2 + {b_2}^2$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$

よって

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2\left|\vec{b}\right|^2 - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{({a_1}^2 + {a_2}^2)\left({b_1}^2 + {b_2}^2\right) - (a_1b_1 + a_2b_2)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{{a_1}^2{b_1}^2 + {a_1}^2{b_2}^2 + {a_2}^2{b_1}^2 + {a_2}^2{b_2}^2 - \left({a_1}^2{b_1}^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + {a_2}^2{b_2}^2\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{{a_1}^2{b_2}^2 - 2a_1b_1a_2b_2 + {a_2}^2{b_1}^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2 - a_2b_1)^2}$$

$$= \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1|$$

4.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-3,\ 0) - (1,\ 4)$

$= (-4,\ -4)$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-2,\ -3) - (1,\ 4)$

$= (-3,\ -7)$

これらと, **3.**の結果より

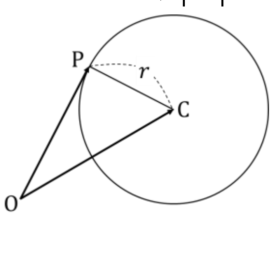
$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}|-4\cdot(-7) - (-4)\cdot(-3)|$$

$$= \frac{1}{2}|28 - 12|$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 16 = \mathbf{8}$$

5.

（1）$\mathrm{CP} = r$であるから，$\left|\overrightarrow{\mathrm{CP}}\right| = r$



$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}$であるから，求めるベクトル方程式は

$\left|\overrightarrow{\mathbf{OP}} - \overrightarrow{\mathbf{OC}}\right| = \boldsymbol{r}$

（2）$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right| = r$より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2 = r^2$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = (x,\ y) - (a,\ b)$

$= (x - a,\ y - b)$

よって，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$

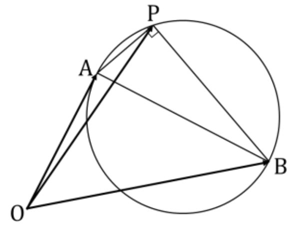
以上より，この円の方程式は$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r$となる.

6.

（1）直径ABに対する円周角は直角であるから，

$\angle\mathrm{APB} = 90°$である.

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BP}}$，すなわち，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}} = 0$



$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}$であるから，

求めるベクトル方程式は

$\left(\overrightarrow{\mathbf{OP}} - \overrightarrow{\mathbf{OA}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathbf{OP}} - \overrightarrow{\mathbf{OB}}\right) = \mathbf{0}$

（2）点Pの座標を$(x,\ y)$とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (x,\ y) - (x_1,\ y_1)$

$= (x - x_1,\ y - y_1)$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (x,\ y) - (x_2,\ y_2)$

$= (x - x_2,\ y - y_2)$

よって

$\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$

$= (x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2)$

以上より，この円の方程式は

$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$となる.