１章　ベクトル

§１　平面のベクトル（p.2～p.24）

問１

正方形の性質より，$\mathrm{AB}=\mathrm{AD}=\mathrm{DC}=\sqrt{2}$

三平方の定理より

$\mathrm{AC}=\mathrm{AB}\times\sqrt{2}=2$

また，$\mathrm{OA}=\mathrm{OC}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AC}=1$

以上より

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=|\overrightarrow{\mathrm{DC}}|=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\mathbf{2}$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1$

大きさと向きが同じベクトルが等しいベクトルであるから，等しいベクトルは，$\overrightarrow{\mathbf{AB}}$と$\overrightarrow{\mathbf{DC}}$

大きさが1のベクトルが単位ベクトルであるから，単位ベクトルは，$\overrightarrow{\mathbf{OA}}$，$\overrightarrow{\mathbf{OB}}$

問２

大きさが同じで向きが反対であるものが，互いに逆ベクトルとなるので

$\overrightarrow{\mathbf{OA}}$と$\overrightarrow{\mathbf{OC}}$，$\overrightarrow{\mathbf{OB}}$と$\overrightarrow{\mathbf{OD}}$

問３

（１）$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}$

$=\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}$

（２）$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$

$=-\vec{c}+(-\vec{a})+\vec{b}+\vec{d}$

$=\boldsymbol{\vec{b}+\vec{d}-\vec{a}-\vec{c}}$

問４

（１）与式$=3\vec{a}+6\vec{b}-2\vec{a}+2\vec{b}$

$=\boldsymbol{\vec{a}+8\vec{b}}$

（２）与式$=3\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}-2\vec{a}+2\vec{b}-2\vec{c}$

$=\boldsymbol{\vec{a}+3\vec{b}-4\vec{c}}$

問５

$4\vec{a}-6\vec{b}-2\vec{x}=3\vec{x}-\vec{a}+4\vec{b}$

$-2\vec{x}-3\vec{x}=-\vec{a}+4\vec{b}-4\vec{a}+6\vec{b}$

$-5\vec{x}=-5\vec{a}+10\vec{b}$

$\vec{x}=-\dfrac{1}{5}\left(-5\vec{a}+10\vec{b}\right)=\boldsymbol{\vec{a}-2\vec{b}}$

問６

求める単位ベクトルを$\vec{e}$とおく.

$\vec{e}=\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$

$=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\vec{a}}$

問７

$\vec{c}+2\vec{d}=(2,\ -1)+2(-1,\ 1)$

$=(2,\ -1)+(-2,\ 2)$

$=(2-2,\ -1+2)$

$=(\mathbf{0},\ \mathbf{1})$

$|\vec{c}+2\vec{d}|=\sqrt{0^2+1^2}$

$=\sqrt{1}=\mathbf{1}$

$2\vec{c}-3\vec{d}=2(2,\ -1)-3(-1,\ 1)$

$=(4,\ -2)+(3,\ -3)$

$=(4+3,\ -2-3)$

$=(\mathbf{7},\ \mathbf{-5})$

$|2\vec{c}-3\vec{d}|=\sqrt{7^2+(-5)^2}$

$=\sqrt{49+25}$

$=\boldsymbol{\sqrt{74}}$

問８

（１）$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(4,\ 3)-(3,\ 0)$

$=(4-3,\ 3-0)$

$=(1,\ 3)$

よって

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{1^2+3^2}$

$=\sqrt{1+9}=\boldsymbol{\sqrt{10}}$

（２）$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-1,\ 1)-(4,\ 3)$

$=(-1-4,\ 1-3)$

$=(-5,\ -2)$

よって

$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{(-5)^2+(-2)^2}$

$=\sqrt{25+4}=\boldsymbol{\sqrt{29}}$

（３）$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(3,\ 0)-(-1,\ 1)$

$=(3-(-1),\ 0-1)$

$=(4,\ -1)$

よって

$$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}| = \sqrt{4^2 + (-1)^2}$$
$$= \sqrt{16+1} = \boldsymbol{\sqrt{17}}$$

$\boxed{\text{問 9}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (1,\ 2) - (-1,\ 3)$$
$$= (1-(-1),\ 2-3)$$
$$= (2,\ -1)$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2}$$
$$= \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

求める単位ベクトルを$\vec{e}$とおくと

$$\vec{e} = \frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{5}}(2,\ -1) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}},\ -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$$

$\boxed{\text{問 10}}$

（１）$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot 5\cdot \cos\frac{\pi}{4}$

$$= 2\cdot 5\cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \boldsymbol{5\sqrt{2}}$$

（２）$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\cdot 2\cdot \cos 150°$

$$= 3\cdot 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boldsymbol{-3\sqrt{3}}$$

$\boxed{\text{問 11}}$

$|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$，$\vec{i}$と$\vec{i}$，$\vec{j}$と$\vec{j}$のなす角は$0$であり，

$\vec{i}$と$\vec{j}$のなす角は$\frac{\pi}{2}$であるから

（１）与式$= 1\cdot 1\cdot \cos 0$

$$= 1\cdot 1\cdot 1 = \mathbf{1}$$

（２）与式$= 1\cdot 1\cdot \cos 0$

$$= 1\cdot 1\cdot 1 = \mathbf{1}$$

（３）与式 $= 1\cdot 1\cdot \cos\frac{\pi}{2}$

$$= 1\cdot 1\cdot 0 = \mathbf{0}$$

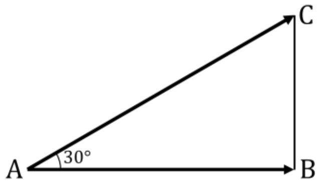
（４）与式 $= 1\cdot 1\cdot \cos\frac{\pi}{2}$

$$= 1\cdot 1\cdot 0 = \mathbf{0}$$

$\boxed{\text{問 12}}$

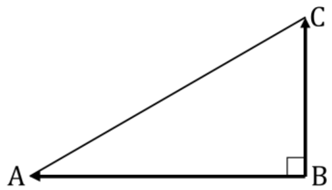
$\mathrm{AB} = \sqrt{3}$，$\mathrm{AC} = 2$

（１）$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$のなす角は$30°$である．



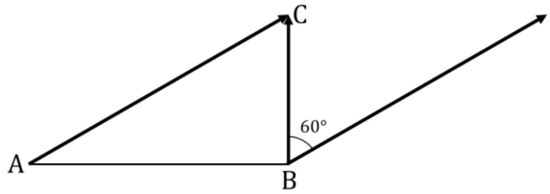
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \sqrt{3}\cdot 2\cdot \cos\frac{\pi}{6}$$
$$= \sqrt{3}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{3}$$

（２）$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$と$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$のなす角は$90°$である．



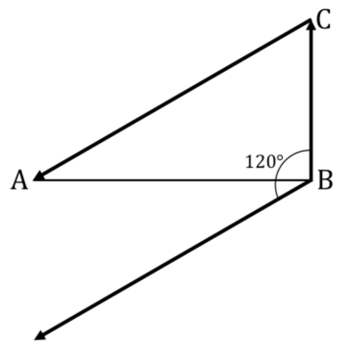
$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \sqrt{3}\cdot 1\cdot \cos\frac{\pi}{2}$$
$$= \sqrt{3}\cdot 1\cdot 0 = \mathbf{0}$$

（３）$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$のなす角は$60°$である．



$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 1\cdot 2\cdot \cos\frac{\pi}{3}$$
$$= 1\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = \mathbf{1}$$

（４）$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$と$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$のなす角は$120°$である．



$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}} = 1\cdot 2\cdot \cos\frac{2}{3}\pi$$
$$= 1\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \mathbf{-1}$$

$\boxed{\text{問 13}}$

（１）$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot 4 + (-5)\cdot 1$

$$= 8 - 5 = \mathbf{3}$$

（２）$\vec{a}\cdot\vec{b} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} + 1\cdot(-2)$

$= 2 - 2 = \mathbf{0}$

問 14

（１）$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2}$

$= \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$

$|\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 1^2}$

$= \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1$

$= 3 + 2 = 5$

したがって

$$\cos\theta = \frac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}}$$

$$= \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$より，$\theta = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$

（２）$|\vec{a}| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-2)^2}$

$= \sqrt{3 + 4} = \sqrt{7}$

$|\vec{b}| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 5^2}$

$= \sqrt{3 + 25} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + (-2) \cdot 5$

$= 3 - 10 = -7$

したがって

$$\cos\theta = \frac{-7}{\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{7}}$$

$$= \frac{-7}{2 \cdot 7} = -\frac{1}{2}$$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$より，$\theta = \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi}$

問 15

（１）与式$= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \left(-3\vec{b}\right) + 2\vec{b} \cdot \vec{a} + 2\vec{b} \cdot \left(-3\vec{b}\right)$

$= |\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} - 6\left|\vec{b}\right|^2$

$= \left(\sqrt{2}\right)^2 - (-1) - 6 \cdot 2^2$

$= 2 + 1 - 24 = \mathbf{-21}$

（２）与式$= \left(\vec{a} - 2\vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} - 2\vec{b}\right)$

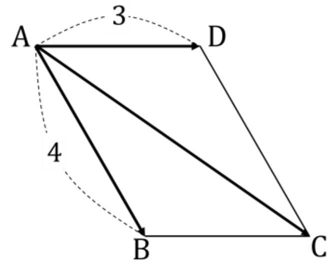
$= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \left(-2\vec{b}\right) - 2\vec{b} \cdot \vec{a} - 2\vec{b} \cdot \left(-2\vec{b}\right)$

$= |\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\left|\vec{b}\right|^2$

$= \left(\sqrt{2}\right)^2 - 4 \cdot (-1) - 4 \cdot 2^2$

$= 2 + 4 + 16 = \mathbf{22}$

問 16



$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = 4$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right| = 3$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} = 4 \cdot 3 \cdot \cos\frac{\pi}{3}$$

$$= 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 6$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}$であるから

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2 = \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2$

$= \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2$

$= 4^2 + 2 \cdot 6 + 3^2$

$= 16 + 12 + 9 = 37$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| > 0$であるから，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = \sqrt{\mathbf{37}}$

問 17

ベクトルの平行条件より，$\vec{b} = m\vec{a}$となる実数mが存在するから

$(-2,\ k + 6) = m(1,\ k)$

これより，$\begin{cases} -2 = m & \cdots ① \\ k + 6 = mk & \cdots ② \end{cases}$

①より，$m = -2$

これを②に代入して

$k + 6 = -2k$

$-3k = 6$

よって，$\boldsymbol{k = -2}$

問 18

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (3,\ 5) - (1,\ 2)$

$= (2,\ 3)$

$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = (k,\ 4) - (-1,\ k)$

$= (k + 1,\ 4 - k)$

ベクトルの平行条件より，$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = m\overrightarrow{\mathrm{AB}}$となる実数$m$が存在するから

$(k + 1,\ 4 - k) = m(2,\ 3)$

これより，$\begin{cases} k + 1 = 2m & \cdots ① \\ 4 - k = 3m & \cdots ② \end{cases}$

①×3－②×2より

$$3(k+1)-2(4-k)=0$$
$$3k+3-8+2k=0$$
$$5k=5$$

よって，$k=1$

問 19

$$\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|^2=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\left|\vec{b}\right|^2$$
$$=\left(\sqrt{3}\right)^2-4\cdot(-2)+4\cdot\left(\sqrt{6}\right)^2$$
$$=3+8+24=35\neq 0$$
$$\left|2\vec{a}+\vec{b}\right|^2=4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2$$
$$=4\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2+4\cdot(-2)+\left(\sqrt{6}\right)^2$$
$$=12-8+6=10\neq 0$$

よって，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$

$\vec{a}-2\vec{b}$と$2\vec{a}+\vec{b}$の内積を求めると

$$\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)=2|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-4\vec{b}\cdot\vec{a}-2\left|\vec{b}\right|^2$$
$$=2|\vec{a}|^2-3\vec{a}\cdot\vec{b}-2\left|\vec{b}\right|^2$$
$$=2\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2-3\cdot(-2)-2\cdot\left(\sqrt{6}\right)^2$$
$$=6+6-12=0$$

よって，$\vec{a}-2\vec{b}$と$2\vec{a}+\vec{b}$は直交する．

問 20

ベクトルの垂直条件より，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$であるから

$$-2\cdot(3+k)+3\cdot 4k=0$$
$$-6-2k+12k=0$$
$$10k=6$$
$$k=\frac{3}{5}$$

このとき，$\vec{b}=\left(\frac{18}{5},\ \frac{12}{5}\right)\neq\vec{0}$

よって，$\boldsymbol{k=\frac{3}{5}}$

問 21

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(3,\ k)-(0,\ 0)$$
$$=(3,\ k)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(3,\ k)-(1,\ 5)$$
$$=(2,\ k-5)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$であるから

$$3\cdot 2+k(k-5)=0$$
$$6+k^2-5k=0$$
$$k^2-5k+6=0$$
$$(k-2)(k-3)=0$$

よって，$\boldsymbol{k=2,\ 3}$

問 22

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2+3}=\boldsymbol{\frac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{5}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3+1}=\boldsymbol{\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{4}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(-3,\ 4)$であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{5}$$
$$=\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$=\frac{3}{5}(2,\ 1)+\frac{2}{5}(-3,\ 4)$$
$$=\left(\frac{6}{5},\ \frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{6}{5},\ \frac{8}{5}\right)$$
$$=\left(\frac{6}{5}-\frac{6}{5},\ \frac{3}{5}+\frac{8}{5}\right)$$
$$=\left(0,\ \frac{11}{5}\right)$$

よって，点 P の座標は，$\boldsymbol{\left(0,\ \frac{11}{5}\right)}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{4}$$
$$=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$=\frac{1}{4}(2,\ 1)+\frac{3}{4}(-3,\ 4)$$
$$=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{9}{4},\ 3\right)$$
$$=\left(-\frac{7}{4},\ \frac{13}{4}\right)$$

よって，点 Q の座標は，$\boldsymbol{\left(-\frac{7}{4},\ \frac{13}{4}\right)}$

問 23

△ABCの重心は，中線ALを2：1に内分する点である．

点Lは，線分BCの中点だから点Lの位置ベクトルは

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}$$

よって，重心Gの位置ベクトルは

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OL}}}{2+1}$$

$$= \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2 \times \frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2}}{3}$$

$$= \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}}{3}$である．

$\boxed{問 24}$

（１）$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$であるから，与えられた等式は

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

となる．

これより，$\vec{b} = \dfrac{1}{2}\vec{a} + \vec{c}$であるから

$$\boldsymbol{\vec{c} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}}$$

（２）$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$$= \vec{b} - \vec{c}$$

$$= \vec{b} - \left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\vec{a}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{CB}} = \frac{1}{2}\vec{a}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

であるから，$\overrightarrow{\mathrm{CB}} \,/\!/\, \overrightarrow{\mathrm{OA}}$である．

$\boxed{問 25}$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$= (6,\ 1) - (2,\ 5) = \boldsymbol{(4,\ -4)}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$= (5,\ 2) - (2,\ 5) = \boldsymbol{(3,\ -3)}$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (4,\ -4)$$

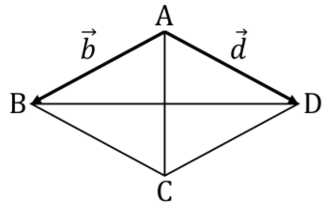
$$= \frac{4}{3}(3,\ -3)$$

$$= \frac{4}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} \,/\!/\, \overrightarrow{\mathrm{AB}}$であるから，3 点 A, B, C は一直線上にある．

$\boxed{問 26}$

下の図のように，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{d}$とする．



ひし形の定義より，$|\vec{b}| = |\vec{d}|$・・・①

また，

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}$

$= \vec{b} + \vec{d}$

$\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}$

$= -\vec{b} + \vec{d}$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$と$\overrightarrow{\mathrm{BD}}$の内積を求めると

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BD}} = (\vec{b} + \vec{d}) \cdot (-\vec{b} + \vec{d})$

$= (\vec{d} + \vec{b}) \cdot (\vec{d} - \vec{b})$

$= |\vec{d}|^2 - |\vec{b}|^2$

ここで，①より，$|\vec{d}|^2 = |\vec{b}|^2$であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BD}} = 0$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BD}}$すなわち，$\mathrm{AC} \perp \mathrm{BD}$である．

$\boxed{問 27}$

（１）直線上の任意の点の座標を$(x,\ y)$，tを実数とすると

$(x,\ y) = (2,\ 1) + t(3,\ 4)$

$= (2 + 3t,\ 1 + 4t)$

成分を比較して

$$\boldsymbol{\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 4t \end{cases}}$$

（２）直線上の任意の点の座標を$(x,\ y)$，tを実数とすると

$(x,\ y) = (3,\ -2) + t(0,\ 5)$

$= (3,\ -2 + 5t)$

成分を比較して

$$\boldsymbol{\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 + 5t \end{cases}}$$

※任意の実数tに対して，常に$x = 3$であるから，

$y = -2 + 5t$はなくてもよい．

（３）$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$を方向ベクトルと考える．

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (7,\ 2) - (4,\ 3) = (3,\ -1)$

点Aを通り，$(3,\ -1)$を方向ベクトルとする直線上の

任意の点の座標を$(x,\ y)$，tを実数とすると

$$(x,\ y)=(4,\ 3)+t(3,\ -1)$$
$$=(4+3t,\ 3-t)$$

成分を比較して

$$\begin{cases}\boldsymbol{x=4+3t}\\ \boldsymbol{y=3-t}\end{cases}$$

※この解答以外に

点Bを通り，$(3,\ -1)$を方向ベクトルとすれば

$$\begin{cases}\boldsymbol{x=7+3t}\\ \boldsymbol{y=2-t}\end{cases}$$

点Aを通り，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(-3,\ 1)$を方向ベクトルとすれば

$$\begin{cases}\boldsymbol{x=4-3t}\\ \boldsymbol{y=3+t}\end{cases}$$

点Bを通り，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(-3,\ 1)$を方向ベクトルとすれば

$$\begin{cases}\boldsymbol{x=7-3t}\\ \boldsymbol{y=2+t}\end{cases}$$

問 28

（１）$\boldsymbol{(4,\ 3)}$

（２）$y=\dfrac{5}{2}x+3$ より，$2y=5x+6$,

すなわち，$5x-2y+6=0$であるから

$\boldsymbol{(5,\ -2)}$

問 29

（１）$\dfrac{|3\cdot 0+5\cdot 0+7|}{\sqrt{3^2+5^2}}=\dfrac{|7|}{\sqrt{34}}$

$$=\boldsymbol{\frac{7}{\sqrt{34}}}$$

（２）$y=2x+5$より，$2x-y+5=0$であるから

$$\frac{|2\cdot(-3)-2+5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|-3|}{\sqrt{5}}$$
$$=\boldsymbol{\frac{3}{\sqrt{5}}}$$

問 30

（１）点Aを通り，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(5,\ 7)-(2,\ 3)=(3,\ 4)$を

方向ベクトルとする直線の式を求めればよい．

直線上の任意の点の座標を$(x,\ y)$，tを実数とすると

$$(x,\ y)=(2,\ 3)+t(3,\ 4)$$
$$=(2+3t,\ 3+4t)$$

成分を比較して

$$\begin{cases}x=2+3t\cdot\cdot\cdot\text{①}\\ y=3+4t\cdot\cdot\cdot\text{②}\end{cases}$$

①より，$t=\dfrac{x-2}{3}$

②より，$t=\dfrac{y-3}{4}$

よって，$\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-3}{4}$

$4(x-2)=3(y-3)$

$4x-8=3y-9$

したがって，$\boldsymbol{4x-3y+1=0}$

【別解】

求める方程式は

$$y-3=\frac{7-3}{5-2}(x-2)$$

$$y-3=\frac{4}{3}(x-2)$$

$3(y-3)=4(x-2)$

$3y-9=4x-8$

よって，$\boldsymbol{4x-3y+1=0}$

（２）点Cと直線ABとの距離をdとすると

$$d=\frac{|4\cdot 4+(-3)\cdot(-1)+1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}$$
$$=\frac{|20|}{\sqrt{25}}=\frac{20}{5}=\boldsymbol{4}$$

（３）$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot d$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{3^2+4^2}\cdot 4$$
$$=\sqrt{25}\cdot 2=5\cdot 2=\boldsymbol{10}$$

問 31

（１）$\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$とおくと

$$(7,\ 8)=m(3,\ 2)+n(1,\ 4)$$
$$=(3m+n,\ 2m+4n)$$

成分を比較して

$$\begin{cases}7=3m+n\ \ \cdot\cdot\cdot\text{①}\\ 8=2m+4n\ \cdot\cdot\cdot\text{②}\end{cases}$$

②より，$4=m+2n$

したがって，$m=4-2n\cdot\cdot\cdot$②’

これを①に代入して

$7=3(4-2n)+n$

$7=12-6n+n$

$-5=-5n$

$n=1$

これを②'に代入して

$m=4-2\cdot 1$

$=4-2=2$

よって，$\boldsymbol{\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}}$

（２）$\vec{d}=m\vec{a}+n\vec{b}$とおくと

$(1,\ -6)=m(3,\ 2)+n(1,\ 4)$

$=(3m+n,\ 2m+4n)$

成分を比較して

$$\begin{cases}1=3m+n & \cdots ① \\ -6=2m+4n & \cdots ②\end{cases}$$

②より，$-3=m+2n$

したがって，$m=-3-2n$・・・②'

これを①に代入して

$1=3(-3-2n)+n$

$1=-9-6n+n$

$10=-5n$

$n=-2$

これを②'に代入して

$m=-3-2\cdot(-2)$

$=-3+4=1$

よって，$\boldsymbol{\vec{d}=\vec{a}-2\vec{b}}$

問 32

（１）$\vec{a}$，$\vec{b}$が線形独立であるから

$$\begin{cases}2=2y-2 & \cdots ① \\ 3x=9 & \cdots ②\end{cases}$$

①より，$y=2$

②より，$x=3$

よって，$\boldsymbol{x=3}$，$\boldsymbol{y=2}$

（２）右辺$=3x\vec{a}+4x\vec{b}+y\vec{a}-\vec{b}$

$=(3x+y)\vec{a}+(4x-1)\vec{b}$

$\vec{a}$，$\vec{b}$が線形独立であるから

$$\begin{cases}x=3x+y & \cdots ① \\ 2y=4x-1 & \cdots ②\end{cases}$$

①より，$y=-2x$・・・①'

これを②に代入して

$2\cdot(-2x)=4x-1$

$-4x=4x-1$

$8x=1$

$x=\dfrac{1}{8}$

これを①'に代入して

$y=-2\cdot\dfrac{1}{8}$

$=-\dfrac{1}{4}$

したがって，$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{8}}$，$\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{4}}$

問 33

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$とする．

点Lは線分ABを3：4に内分する点なので

$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\dfrac{4\vec{a}+3\vec{b}}{3+4}$

$=\dfrac{4}{7}\vec{a}+\dfrac{3}{7}\vec{b}$

点Pは線分OL上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OL}}$となる

実数sが存在するから

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\left(\dfrac{4}{7}\vec{a}+\dfrac{3}{7}\vec{b}\right)$

$=\dfrac{4s}{7}\vec{a}+\dfrac{3s}{7}\vec{b}$・・・①

また，点Pは線分AN上にあるので，実数tを用いて，

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AM}}$とおけば

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AM}}$

$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t(\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$

$=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OM}}$

ここで，点 M は線分 OB の中点だから，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{2}\vec{b}$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\vec{a}+\dfrac{t}{2}\vec{b}$・・・②

①，②より

$\dfrac{4s}{7}\vec{a}+\dfrac{3s}{7}\vec{b}=(1-t)\vec{a}+\dfrac{t}{2}\vec{b}$

$\vec{a}$，$\vec{b}$は線形独立なので

$$\begin{cases} \dfrac{4s}{7} = 1 - t \\ \dfrac{3s}{7} = \dfrac{1}{2}t \end{cases}$$

整理すると

$$\begin{cases} 4s + 7t = 7 \cdots ③ \\ 6s - 7t = 0 \cdots ④ \end{cases}$$

③+④より

$$10s = 7$$

$$s = \frac{7}{10}$$

これを③に代入して解くと

$$4 \cdot \frac{7}{10} + 7t = 7$$

$$\frac{14}{5} + 7t = 7$$

$$14 + 35t = 35$$

$$35t = 21$$

$$t = \frac{3}{5}$$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AM}}$となるので

$\mathrm{AP} : \mathrm{PM} = \mathbf{3} : \mathbf{2}$