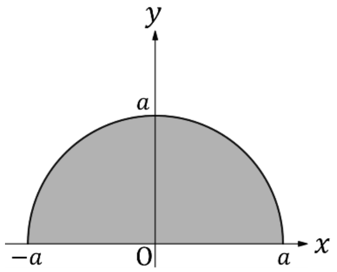
練習問題 2-A

1.

（1）領域を図示すると



よって，領域Dは，次の不等式で表すことができる．

$0 \leqq r \leqq a$，$0 \leqq \theta \leqq \pi$

したがって

$$与式 = \iint_D \sqrt{r^2} \cdot r \, drd\theta$$

$$= \int_0^\pi \left\{ \int_0^a r^2 dr \right\} d\theta$$

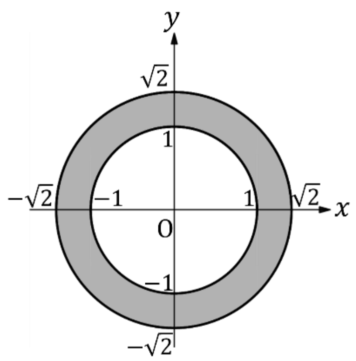
$$= \int_0^\pi \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_0^a d\theta$$

$$= \frac{1}{3} a^3 \int_0^\pi d\theta$$

$$= \frac{1}{3} a^3 \Big[\theta \Big]_0^\pi$$

$$= \frac{1}{3} a^3 (\pi - 0) = \boldsymbol{\frac{1}{3} \pi a^3}$$

（2）領域を図示すると



よって，領域Dは，次の不等式で表すことができる．

$1 \leqq r \leqq \sqrt{2}$，$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$

したがって

$$与式 = \iint_D \frac{1}{r^2 + 1} \cdot r \, drd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_1^{\sqrt{2}} \frac{r}{r^2 + 1} dr \right\} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_1^{\sqrt{2}} \frac{(r^2 + 1)' \cdot \frac{1}{2}}{r^2 + 1} dr \right\} d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \Big[\log(r^2 + 1) \Big]_1^{\sqrt{2}} d\theta$$

$$= \frac{1}{2} (\log 3 - \log 2) \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{1}{2} (\log 3 - \log 2) \Big[\theta \Big]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2} (\log 3 - \log 2)(2\pi - 0)$$

$$= \pi (\log 3 - \log 2)$$

$$= \boldsymbol{\pi \log \frac{3}{2}}$$

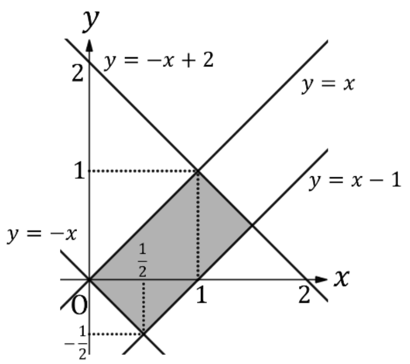
2.

（1）$0 \leqq x + y \leqq 2$より，$-x \leqq y \leqq -x + 2$

$0 \leqq x - y \leqq 1$より，$-x \leqq -y \leqq -x + 1$であるから，

$x - 1 \leqq y \leqq x$

以上より，領域Dは図のようになる．



（2）$x + y = u$・・・①，$x - y = v$・・・②とする．

①＋②より，$2x = u + v$であるから

$$x = \frac{u + v}{2}$$

よって，$\dfrac{\partial x}{\partial u} = \dfrac{1}{2}$，$\dfrac{\partial x}{\partial v} = \dfrac{1}{2}$

①－②より，$2y = u - v$であるから

$$y = \frac{u - v}{2}$$

よって，$\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{1}{2}$，$\frac{\partial y}{\partial v}=-\frac{1}{2}$

また，$0 \leqq u \leqq 2$，$0 \leqq v \leqq 1$，

ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}$$

$$=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}$$

よって

$$与式=\iint_D ue^v\left|-\frac{1}{2}\right|dudv$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D ue^v dudv$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left\{\int_0^2 ue^v du\right\}dv$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 e^v\left[\frac{1}{2}u^2\right]_0^2 dv$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 e^v(4-0)dv$$

$$=\int_0^1 e^v dv$$

$$=\left[e^v\right]_0^1$$

$$=e^1-e^0$$

$$=\boldsymbol{e-1}$$

3.

（１）被積分関数は，点$(0,\ 0)$で定義されないので，

原点を中心とする半径 $\varepsilon\,(0<\varepsilon<1)$ の円の内部をDから除いた領域をD_εとする．

$$与式=\lim_{\varepsilon\to+0}\iint_{D_\varepsilon}\frac{xy}{x^2+y^2}dxdy$$

極座標に変換すると，領域D_εは次の不等式で表すことができる．

$$\varepsilon \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$$

したがって

$$与式=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_\varepsilon^1\frac{r\cos\theta\cdot r\sin\theta}{r^2}\cdot r\,dr\right\}d\theta$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_\varepsilon^1 r\cos\theta\sin\theta\,dr\right\}d\theta$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\left[\frac{1}{2}r^2\right]_\varepsilon^1 d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{(1-\varepsilon^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\,d\theta\right\}$$

ここで，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\,d\theta$ について，$t=\sin\theta$ とおくと

$dt=\cos\theta\,d\theta$

また，rとtの対応は

θ	0	$\to$	$\frac{\pi}{2}$
t	0	$\to$	1

したがって

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\,d\theta=\int_0^1 t\,dt$$

$$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

したがって

$$与式=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}(1-\varepsilon^2)\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{4}(1-0)=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

（２）$x^2+y^2 \geqq 1$は，円$x^2+y^2=1$の外側であるから，

$$与式=\lim_{a\to\infty}\iint_D\frac{1}{(x^2+y^2)^2}dxdy\ とする．$$

極座標に変換すると，領域Dは次の不等式で表すことができる．

$1 \leqq r \leqq a$，$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$

$$与式=\lim_{a\to\infty}\int_0^{2\pi}\left\{\int_1^a\frac{1}{(r^2)^2}\cdot r\,dr\right\}d\theta$$

$$=\lim_{a\to\infty}\int_0^{2\pi}\left\{\int_1^a r^{-3}dr\right\}d\theta$$

$$=\lim_{a\to\infty}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{-2}r^{-2}\right]_1^a d\theta$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{a\to\infty}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{a^2}-1\right)d\theta$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{a\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{a^2}-1\right)\left[\theta\right]_0^{2\pi}\right\}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{a\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{a^2}-1\right)\cdot 2\pi\right\}$$

$$=-\pi\lim_{a\to\infty}\left(\frac{1}{a^2}-1\right)$$

$$=-\pi(0-1)=\boldsymbol{\pi}$$

4.

$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ の導出は省略する．※p. 89 例題 5

（1）$x = \frac{t}{\sqrt{2}}$ とおくと，$dx = \frac{1}{\sqrt{2}}dt$

また，xとtの対応は

x	$-\infty$	$\to$	∞
t	$-\infty$	$\to$	∞

よって

$$与式 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\cdot\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2\int_0^{\infty} e^{-t^2}dt \quad e^{-t^2}が偶関数$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad ※p.89 例題 5 より$$

$$= \sqrt{\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}}$$

（2）$x-2=t$とおくと，$dx = dt$

また，xとtの対応は

x	2	$\to$	∞
t	0	$\to$	∞

よって

$$与式 = \int_0^{\infty} e^{-t^2}dt$$

$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \quad ※p.89 例題 5 より$$

5.

$z = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$について

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}\,,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

よって，求める面積をSとすると

$$S = \iint_D \sqrt{\left(\sqrt{x}\right)^2 + 0^2 + 1}dxdy$$

$$= \int_0^3\left\{\int_0^3 \sqrt{x+1}dy\right\}dx$$

$$= \int_0^3 \sqrt{x+1}\Big[y\Big]_0^3 dx$$

$$= 3\int_0^3 (x+1)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= 3\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3$$

$$= 2\left[(x+1)\sqrt{x+1}\right]_0^3$$

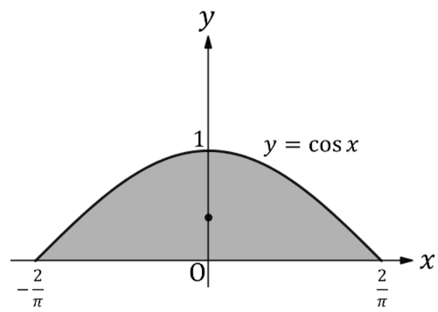
$$= 2\left\{(3+1)\sqrt{3+1} - (0+1)\sqrt{0+1}\right\}$$

$$= 2\cdot 7 = \mathbf{14}$$

6.

図形が表す領域をD，重心の座標を$(\overline{x},\ \overline{y})$とする．

領域Dは，y軸に対して対称だから，$\overline{x} = 0$



領域は，$-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$，$0 \leqq y \leqq \cos x$

以上より

$$\iint_D y\,dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_0^{\cos x} y\,dy\right\}dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{\cos x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x^2\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

また

$$\iint_D dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_0^{\cos x} dy\right\}dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big[y\Big]_0^{\cos x} dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$$

$$= 2\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right)$$

$$= 2(1-0) = 2$$

したがって

$$\overline{y} = \frac{\iint_D y\,dxdy}{\iint_D dxdy} = \frac{\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{8}$$

したがって，求める重心の座標は，$\left(\mathbf{0},\ \boldsymbol{\frac{\pi}{8}}\right)$

練習問題 2-B

1.

直線$y=\sqrt{3}x$と，円$x^2+y^2=4$の交点を求めると

$$x^2 + \left(\sqrt{3}x\right)^2 = 4$$

$$x^2 + 3x^2 = 4$$

$$4x^2 = 4$$

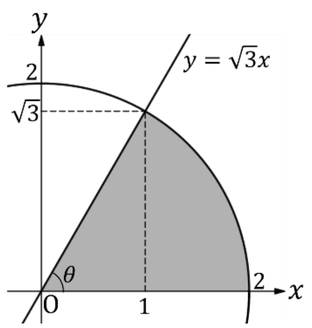
$$x^2 = 1$$

$x \geqq 0$より，$x=1$

$$y = \sqrt{3}\cdot 1 = \sqrt{3}$$

よって，交点は$\left(1,\ \sqrt{3}\right)$

領域を図示すると



図において，直線$y=\sqrt{3}x$とx軸がなす角θは，

$\tan\theta = \sqrt{3}$より，$\theta = \frac{\pi}{3}$

よって，極座標に変換すると，領域Dは次の不等式で表すことができる．

$$0 \leqq r \leqq 2,\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}$$

よって

$$与式 = \iint_D r\cos\theta \cdot r\,drd\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}}\left\{\int_0^2 r^2\cos\theta\,dr\right\}d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\theta\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\theta\cdot 8d\theta$$

$$= \frac{8}{3}\Big[\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{8}{3}\left(\sin\frac{\pi}{3} - \sin 0\right)$$

$$= \frac{8}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\frac{4\sqrt{3}}{3}}$$

2.

$x = ar\cos\theta$，$y = br\sin\theta$とおくと

$$\frac{a^2r^2\cos^2\theta}{a^2} + \frac{b^2r^2\sin^2\theta}{b^2} \leqq 1$$

$$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta \leqq 1$$

すなわち，$r^2 \leqq 1$であるから，$0 \leqq r \leqq 1$，$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$

また

$$\frac{\partial x}{\partial r} = a\cos\theta\ ,\ \ \frac{\partial x}{\partial \theta} = -ar\sin\theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = b\sin\theta\ ,\ \ \frac{\partial y}{\partial \theta} = br\cos\theta$$

であるから，ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(r,\ \theta)} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= abr\cos^2\theta + abr\sin^2\theta$$

$$= abr(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = abr\ (\geqq 0)$$

よって

$$与式 = \iint_D \{(ar\cos\theta)^2 + (br\sin\theta)^2\}\cdot abr\,drd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^1 r^2(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)abr\,dr\right\}d\theta$$

$$= ab\int_0^{2\pi}\left\{(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)\int_0^1 r^3\,dr\right\}d\theta$$

$$= ab\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^1 d\theta$$

$$= ab\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{4}ab\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{4}ab\left(\int_0^{2\pi}a^2\cos^2\theta\,d\theta + \int_0^{2\pi}b^2\sin^2\theta\,d\theta\right)$$

$$= \frac{1}{4}ab\left(4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta + b^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta\right)$$

$$= ab\left\{a^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) + b^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$= ab\left(\frac{\pi}{4}a^2 + \frac{\pi}{4}b^2\right)$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2)}$$

3.

（１）xとyの符号によって，不等式を場合分けすると

i）$x \geqq 0$，$y \geqq 0$のとき

$x + y \leqq 1$より，$y \leqq -x + 1$・・・①

ii）$x \geqq 0$，$y \leqq 0$のとき

$x - y \leqq 1$より，$y \geqq x - 1$・・・②

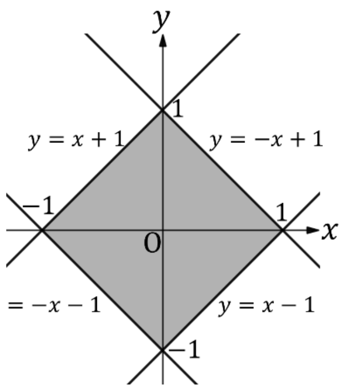
iii）$x \leqq 0$，$y \geqq 0$のとき

$-x + y \leqq 1$より，$y \leqq x + 1$・・・③

iv）$x \leqq 0$，$y \leqq 0$のとき

$-x - y \leqq 1$より，$y \geqq -x - 1$・・・④

①，②，③，④より，領域Dを図示すると



（２）（１）の①より，$x + y \leqq 1$

④より，$-1 \leqq x + y$

よって，$-1 \leqq x + y \leqq 1$

②より，$x - y \leqq 1$

③より，$-1 \leqq x - y$

よって，$-1 \leqq x + y \leqq 1$

u，vを用いると，領域Dは

$-1 \leqq u \leqq 1$，$-1 \leqq v \leqq 1$

$x + y = u$・・・⑤，$x - y = v$・・・⑥

⑤＋⑥より，$2x = u + v$であるから

$$x = \frac{u + v}{2}$$

⑤－⑥より，$2y = u - v$であるから

$$y = \frac{u - v}{2}$$

よって，ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$$

したがって

$$与式 = \int_{-1}^{1}\left\{\int_{-1}^{1} u^2 \cos\frac{\pi v}{2}\cdot\left|-\frac{1}{2}\right| du\right\} dv$$

$$= \int_{-1}^{1}\left\{\frac{1}{2}\cdot 2\int_{0}^{1} u^2 \cos\frac{\pi v}{2}\cdot\left|-\frac{1}{2}\right| du\right\} dv$$

$$= \int_{-1}^{1} \cos\frac{v\pi}{2}\left[\frac{1}{3}u^3\right]_0^1 dv$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} \cos\frac{v\pi}{2} dv$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 2\int_{0}^{1} \cos\frac{v\pi}{2} dv$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{1}{\frac{1}{2}\pi}\sin\frac{v\pi}{2}\right]_0^1$$

$$= \frac{4}{3\pi}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right)$$

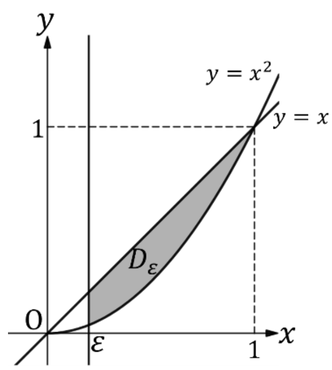
$$= \boldsymbol{\frac{4}{3\pi}}$$

4.

領域D内で，$x = y = 0$は定義されないので，

図のような領域を考え，これをD_εとする．

また，この領域D内で，$\dfrac{x}{x^2 + y^2} \geqq 0$



$$与式 = \lim_{\varepsilon \to +0} \iint_{D_\varepsilon} \frac{x}{x^2 + y^2} dxdy$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{1}\left\{\int_{x^2}^{x}\frac{x}{x^2+y^2}dy\right\}dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{1}x\left[\frac{1}{x}\tan^{-1}\frac{y}{x}\right]_{x^2}^{x}dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{1}(\tan^{-1}1-\tan^{-1}x)dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{1}\left(\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}x\right)dx$$

ここで，部分積分法を用いて

$$\int\tan^{-1}x\,dx=\int(x)'\tan^{-1}x\,dx$$

$$= x\tan^{-1}x-\int x\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= x\tan^{-1}x-\int\frac{x}{1+x^2}dx$$

$$= x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

よって

$$与式=\lim_{\varepsilon\to0}\left[\frac{\pi}{4}x-\left\{x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right\}\right]_{\varepsilon}^{1}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0}\left\{\left(\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}1+\frac{1}{2}\log2\right)\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\pi}{4}\varepsilon-\varepsilon\tan^{-1}\varepsilon+\frac{1}{2}\log(1+\varepsilon^2)\right)\right\}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0}\left\{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\log2\right)\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\pi}{4}\varepsilon-\varepsilon\tan^{-1}\varepsilon+\frac{1}{2}\log(1+\varepsilon^2)\right)\right\}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}\log2}$$

5.

（1）$\dfrac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}=t$とおくと，$\dfrac{1}{\sqrt{2}\sigma}dx=dt$より，$dx=\sqrt{2}\sigma dt$

また，xとtの対応は

x	$-\infty$	$\to$	∞
t	$-\infty$	$\to$	∞

よって

$$左辺=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}\cdot\sqrt{2}\sigma dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\sqrt{2}\sigma\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot2\int_{0}^{\infty}e^{-t^2}dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$ ※p. 89 例題 5

$$= 1 = 右辺$$

（2）$\dfrac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}=t$とおくと，$\dfrac{1}{\sqrt{2}\sigma}dx=dt$より，$dx=\sqrt{2}\sigma dt$

$x=\sqrt{2}\sigma t+\mu$

また，xとtの対応は

x	$-\infty$	$\to$	∞
t	$-\infty$	$\to$	∞

よって

$$左辺=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}(\sqrt{2}\sigma t+\mu)e^{-t^2}\cdot\sqrt{2}\sigma dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sqrt{2}\sigma t+\mu)e^{-t^2}dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{2}\sigma te^{-t^2}dt+\int_{-\infty}^{\infty}\mu e^{-t^2}dt\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{2}\sigma\int_{-\infty}^{\infty}te^{-t^2}dt+\mu\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt\right)$$

ここで，不定積分$\displaystyle\int te^{-t^2}dt$を求める．

$-t^2=u$とおくと，$-2tdt=du$より，$tdt=-\dfrac{1}{2}du$

よって

$$\int te^{-t^2}dt=\int e^u\cdot\left(-\frac{1}{2}du\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\int e^u du$$

$$= -\frac{1}{2}e^u=-\frac{1}{2}e^{-t^2}$$

したがって

$$\int_{-\infty}^{\infty}te^{-t^2}dt=\lim_{\substack{a\to-\infty\\b\to\infty}}\int_a^b te^{-t^2}dt$$

$$= \lim_{\substack{a\to-\infty\\b\to\infty}}\left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_a^b$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{\substack{a\to-\infty\\b\to\infty}}\left(e^{-b^2}-e^{-a^2}\right)=0$$

以上より

$$左辺=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{2}\sigma\int_{-\infty}^{\infty}te^{-t^2}dt+\mu\cdot2\int_{0}^{\infty}e^{-t^2}dt\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{2}\sigma \cdot 0 + \mu \cdot \sqrt{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \mu\sqrt{\pi}$$

$$= \mu = \text{右辺}$$

6.

$z = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$について

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = y$$

ここで

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1 = x^2 + y^2 + 1$$

よって，求める面積をSとすると

$$S = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\, dxdy$$

領域D'を，$x^2 + y^2 \leqq 3$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$とし，
極座標に変換すると，領域D'は次の不等式で
表すことができる．

$$0 \leqq r \leqq \sqrt{3}, \quad 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$$

よって

$$S = 4\iint_{D'} \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\, dxdy$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{r^2 + 1} \cdot r\, dr\right\} d\theta$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{r^2 + 1} \cdot r\, dr$ について，

$r^2 + 1 = t$とおくと，$2rdr = dt$より，$rdr = \dfrac{1}{2}dt$

また，rとtの対応は

r	0	$\to$	$\sqrt{3}$
t	1	$\to$	4

よって

$$\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{r^2 + 1} \cdot r\, dr = \int_1^4 \sqrt{t} \cdot \frac{1}{2} dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$

$$= \frac{1}{3}\left[t\sqrt{t}\right]_1^4$$

$$= \frac{1}{3}\left(4\sqrt{4} - 1\right)$$

$$= \frac{7}{3}$$

したがって

$$S = 4\iint_{D'} \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\, dxdy$$

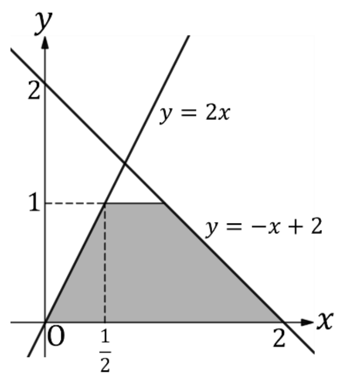
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{7}{3} d\theta$$

$$= 4 \cdot \frac{7}{3}\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{28}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \boldsymbol{\frac{14}{3}\pi}$$

7.

重心の座標を$(\overline{x},\ \overline{y})$とする．
領域を図示すると



$y = 2x$より，$x = \dfrac{y}{2}$

$y = 2 - x$より，$x = 2 - y$
よって，領域Dは次の不等式で表すことができる．

$$\frac{y}{2} \leqq x \leqq 2 - y, \quad 0 \leqq y \leqq 1$$

よって

$$\iint_D x\, dxdy = \int_0^1 \left\{\int_{\frac{y}{2}}^{2-y} x\, dx\right\} dy$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{\frac{y}{2}}^{2-y} dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{(2 - y)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2\right\} dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(4 - 4y + y^2 - \frac{y^2}{4}\right) dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(4 - 4y + \frac{3}{4}y^2\right) dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[4y - 2y^2 + \frac{1}{4}y^3\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left(4 - 2 + \frac{1}{4}\right)$$

$$= 2 - 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}$$

また

$$\iint_D dxdy = \int_0^1 \left\{\int_{\frac{y}{2}}^{2-y} dx\right\} dy$$

$$= \int_0^1 \left[x\right]_{\frac{y}{2}}^{2-y} dy$$

$$= \int_0^1 \left(2 - y - \frac{y}{2}\right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(2 - \frac{3}{2}y\right) dy$$

$$= \left[2y - \frac{3}{4}y^2\right]_0^1$$

$$= 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

したがって

$$\overline{x} = \frac{\iint_D x\, dxdy}{\iint_D dxdy} = \frac{\frac{9}{8}}{\frac{5}{4}} = \frac{9}{10}$$

また

$$\iint_D x\, dxdy = \int_0^1 \left\{\int_{\frac{y}{2}}^{2-y} y\, dx\right\} dy$$

$$= \int_0^1 y\left[x\right]_{\frac{y}{2}}^{2-y} dy$$

$$= \int_0^1 y\left(2 - y - \frac{y}{2}\right) dy$$

$$= \int_0^1 y\left(2 - \frac{3}{2}y\right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(2y - \frac{3}{2}y^2\right) dy$$

$$= \left[y^2 - \frac{1}{2}y^3\right]_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

また，$\iint_D dxdy = \int_0^1 \left\{\int_{\frac{y}{2}}^{2-y} dx\right\} dy = \frac{5}{4}$

したがって

$$\overline{y} = \frac{\iint_D y\, dxdy}{\iint_D dxdy} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}} = \frac{2}{5}$$

したがって，求める重心の座標は，$\left(\boldsymbol{\frac{9}{10}},\ \boldsymbol{\frac{2}{5}}\right)$