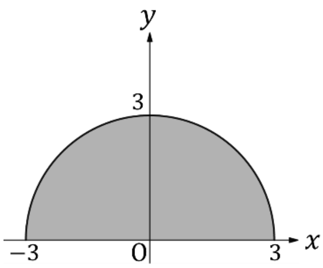
3章　重積分

§2　変数の変換と重積分（p.80～p.95）

問1

（1）領域を図示すると



よって，領域Dは，次の不等式で表すことができる．

$0 \leqq r \leqq 3$，$0 \leqq \theta \leqq \pi$

したがって，与式を極座標に変換すると

$$与式 = \iint_D r\sin\theta \cdot r\,drd\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\left\{\int_0^3 r^2\sin\theta\,dr\right\}d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\sin\theta\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^3 d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} 9\sin\theta\,d\theta$$

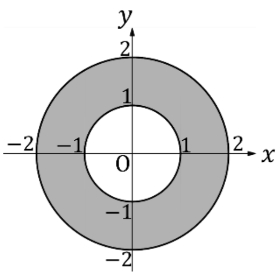
$$= 9\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}$$

$$= 9\{-\cos\pi-(-\cos 0)\}$$

$$= 9\{-(-1)+1\}$$

$$= 9\cdot 2 = \mathbf{18}$$

（2）領域を図示すると



よって，領域Dは，次の不等式で表すことができる．

$1 \leqq r \leqq 2$，$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$

したがって，与式を極座標に変換すると

$$与式 = \iint_D \sqrt{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}\cdot r\,drd\theta$$

$$= \iint_D \sqrt{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\cdot r\,drd\theta$$

$$= \iint_D |r|\cdot r\,drd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left\{\int_1^2 r^2 dr\right\}d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{3}r^3\right]_1^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}(8-1)d\theta$$

$$= \frac{7}{3}\int_0^{2\pi}d\theta$$

$$= \frac{7}{3}\Big[\theta\Big]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{7}{3}\cdot 2\pi = \boldsymbol{\frac{14}{3}\pi}$$

問2

曲面とxy平面との交線は，曲面の方程式において，

$z=0$とすれば，$4-x^2-y^2=0$，

すなわち，$x^2+y^2=4$である．

領域Dを，$x^2+y^2 \leqq 4$，$-2 \leqq x \leqq 2$，$-2 \leqq y \leqq 2$とし，

求める体積をVとすれば

$$V = \iint_D (4-x^2-y^2)dxdy$$

極座標に変換すると，領域Dは次の不等式表すことができる．

$0 \leqq r \leqq 2$，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$

したがって

$$V = \iint_D \{4-(x^2+y^2)\}dxdy$$

$$= \iint_D (4-r^2)\cdot r\,drd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left\{\int_0^2 (4r-r^3)dr\right\}d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[2r^2-\frac{1}{4}r^4\right]_0^2 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}(8-4)d\theta$$

$$= 4\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= 4\Big[\theta\Big]_0^{2\pi}$$

$$= 4 \cdot 2\pi = \boldsymbol{8\pi}$$

問３

$x = au\cos v$，$y = bu\sin v$とおくと

ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)} = \begin{vmatrix} a\cos v & -au\sin v \\ b\sin v & bu\cos v \end{vmatrix}$$

$$= abu\cos^2 v + abu\sin^2 v$$

$$= abu(\cos^2 v + \sin^2 v) = abu$$

また，$0 \leqq u \leqq 1$，$0 \leqq v \leqq \dfrac{\pi}{2}$であるから

$$\iint_D x\, dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^1 au\cos v \cdot abu\, du \right\} dv$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 b\cos v \left[\frac{1}{3}u^3\right]_0^1 dv$$

$$= \frac{1}{3}a^2 b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos v\, dv$$

$$= \frac{a^2 b}{3}\Big[\sin v\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{a^2 b}{3}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right)$$

$$= \frac{a^2 b}{3} \cdot 1 = \boldsymbol{\frac{a^2 b}{3}}$$

問４

u，vを用いると，領域Dは

$|u| \leqq 2$より，$-2 \leqq u \leqq 2$

$|v| \leqq 1$より，$-1 \leqq v \leqq 1$

$x + y = u$，$2x - y = v$を，x，yについて解くと

$$\begin{cases} x + y = u & \cdots ① \\ 2x - y = v & \cdots ② \end{cases}$$

①＋②より，$3x = u + v$

よって，$x = \dfrac{u+v}{3}$

これを①に代入して，整理すると

$$\frac{u+v}{3} + y = u$$

$$u + v + 3y = 3u$$

$$y = \frac{2u - v}{3}$$

よって，ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{9} - \frac{2}{9} = -\frac{1}{3}$$

したがって

$$与式 = \int_{-1}^1 \left\{ \int_{-2}^2 u^2 v^4 \cdot \left|-\frac{1}{3}\right| du \right\} dv$$

$$= \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{3} \cdot 2\int_0^2 u^2 v^4 du \right\} dv \quad ※u^2が偶関数$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}u^3 v^4\right]_0^2 dv$$

$$= \frac{2}{9}\int_{-1}^1 8v^4\, dv$$

$$= \frac{16}{9} \cdot 2\int_0^1 v^4 dv \quad ※v^4が偶関数$$

$$= \frac{32}{9}\left[\frac{1}{5}v^5\right]_0^1$$

$$= \frac{32}{9} \cdot \frac{1}{5} = \boldsymbol{\frac{32}{45}}$$

問５

被積分関数は，点$(0,\ 0)$で定義されないので，原点を中心とする半径 ε（$0 < \varepsilon < 1$）の円の内部をDから除いた領域をD_εとする．

（１）$与式 = \displaystyle\lim_{\varepsilon \to +0} \iint_{D_\varepsilon} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dxdy$

極座標に変換すると，領域D_εは次の不等式で表すことができる．

$$\varepsilon \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$$

したがって

$$与式 = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_\varepsilon^1 \frac{r\sin\theta}{\sqrt{r^2}} \cdot r\, dr \right\} d\theta$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_\varepsilon^1 r\sin\theta\ dr \right\} d\theta$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \left[\frac{1}{2}r^2\right]_\varepsilon^1 d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon \to +0}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,(1-\varepsilon^2)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon \to +0}(1-\varepsilon^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon \to +0}(1-\varepsilon^2)\Big[\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon \to +0}(1-\varepsilon^2)(1-0)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

（２）与式 $= \displaystyle\lim_{\varepsilon \to +0}\iint_{D_\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$

極座標に変換すると，領域D_εは次の不等式で表すことができる．

$\varepsilon \leqq r \leqq 1$，$0 \leqq \theta \leqq \pi$

したがって

$$与式 = \lim_{\varepsilon \to +0}\int_0^{\pi}\left\{\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{r^2}}\cdot r\,dr\right\}d\theta$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0}\int_0^{\pi}\left\{\int_\varepsilon^1 dr\right\}d\theta$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0}\int_0^{\pi}\Big[r\Big]_\varepsilon^1 d\theta$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0}\int_0^{\pi}(1-\varepsilon)d\theta$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0}\left\{(1-\varepsilon)\Big[\theta\Big]_0^{\pi}\right\}$$

$$= (1-0)\cdot\pi = \boldsymbol{\pi}$$

問６

（１）与式 $= \displaystyle\int_0^a\left\{\int_0^a \frac{1}{(x+2)^2(y+1)^2}dx\right\}dy$

$$= \int_0^a\left\{\frac{1}{(y+1)^2}\int_0^a \frac{1}{(x+2)^2}dx\right\}dy$$

$$= \int_0^a \frac{1}{(y+1)^2}\left[-\frac{1}{x+2}\right]_0^a dy$$

$$= \int_0^a \frac{1}{(y+1)^2}\left(-\frac{1}{a+2}+\frac{1}{2}\right)dy$$

$$= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{a+2}\right)\int_0^a \frac{1}{(y+1)^2}dy$$

$$= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{a+2}\right)\left[-\frac{1}{y+1}\right]_0^a$$

$$= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{a+2}\right)\left(-\frac{1}{a+1}+1\right)$$

$$= \boldsymbol{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{a+2}\right)\left(1-\frac{1}{a+1}\right)}$$

（２）与式 $= \displaystyle\lim_{a \to \infty}\iint_{D_a}\frac{1}{(x+2)^2(y+1)^2}dxdy$

$$= \lim_{a \to \infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{a+2}\right)\left(1-\frac{1}{a+1}\right) \quad ※（１）より$$

$$= \left(\frac{1}{2}-0\right)(1-0) = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

問７

（１）極座標に変換すると，領域D_aは次の不等式で表すことができる．

$0 \leqq r \leqq a$，$0 \leqq \theta \leqq \pi$

したがって

$$与式 = \int_0^{\pi}\left\{\int_0^a \frac{1}{(r^2+1)^2}\cdot r\,dr\right\}d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\left\{\int_0^a \frac{r}{(r^2+1)^2}dr\right\}d\theta$$

ここで，$\displaystyle\int_0^a \frac{r}{(r^2+1)^2}dr$ について，$t = r^2+1$ とおくと

$dt = 2rdr$より，$rdr = \dfrac{1}{2}dt$

また，rとtの対応は

r	0	$\to$	a
t	1	$\to$	a^2+1

よって

$$\int_0^a \frac{r}{(r^2+1)^2}dr = \int_1^{a^2+1}\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{2}dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{t}\right]_1^{a^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{a^2+1}-(-1)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{a^2+1}\right)$$

したがって

$$与式 = \int_0^{\pi}\left\{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{a^2+1}\right)\right\}d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{a^2+1}\right)\int_0^{\pi}d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{a^2+1}\right)\Big[\theta\Big]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{a^2+1}\right)\cdot\pi = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{a^2+1}\right)}$$

（２）与式 $= \lim_{a^2\to\infty}\left\{\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{a^2+1}\right)\right\}$

$= \frac{\pi}{2}(1-0) = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$

$\boxed{\text{問 8}}$

$x=\sqrt{2}t$ より，$dx=\sqrt{2}dt$

また，x と t の対応は

x	$-\infty$	$\to$	∞
t	$-\infty$	$\to$	∞

よって

与式 $= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\sqrt{2}t)^2}{2}}\cdot\sqrt{2}dt$

$= \sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt$

$= \sqrt{2}\cdot 2\int_0^{\infty} e^{-t^2}dt$　※e^{-t^2} が偶関数

$= 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}$　※例題 5 より

$= \boldsymbol{\sqrt{2\pi}}$

$\boxed{\text{問 9}}$

$z=4-x^2$ について

$\frac{\partial z}{\partial x}=-2x$，$\frac{\partial z}{\partial y}=0$

よって，求める面積を S とすると

$S=\iint_D \sqrt{(-2x)^2+0^2+1}dxdy$

$=\int_0^2\left\{\int_0^x\sqrt{4x^2+1}dy\right\}dx$

$=\int_0^2\sqrt{4x^2+1}\Big[y\Big]_0^x$

$=\int_0^2 x\sqrt{4x^2+1}dx$

$4x^2+1=t$ とおくと，$8xdx=dt$

すなわち，$xdx=\frac{1}{8}dt$

また，x と t の対応は

x	0	$\to$	2
t	1	$\to$	17

よって

$S=\int_1^{17}\sqrt{t}\cdot\frac{1}{8}dt$

$=\frac{1}{8}\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_1^{17}$

$=\frac{1}{12}\left(17\sqrt{17}-1\right)=\boldsymbol{\frac{17\sqrt{17}-1}{12}}$

$\boxed{\text{問 10}}$

$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ について

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\cdot(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\cdot(-2y)=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$

ここで

$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1$

$=\left(-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2+1$

$=\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}+1$

$=\frac{x^2+y^2+a^2-x^2-y^2}{a^2-x^2-y^2}$

$=\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}$

よって，求める面積を S とすると

$S=\iint_D\sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}}dxdy$

$=\iint_D\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$

$=a\iint_D\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$

領域 D' を，$x^2+y^2\leqq b^2$，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ とし，
極座標に変換すると，領域 D' は次の不等式で
表すことができる．

$0\leqq r\leqq b$，$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$

よって

$S=4a\iint_{D'}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$

$=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_0^b\frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}}\cdot r\,dr\right\}d\theta$

ここで，$\int_0^b\frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}}\cdot r\,dr$ について，

$a^2-r^2=t$ とおくと

$-2rdr = dt$より，$rdr = -\dfrac{1}{2}dt$

また，rとtの対応は

r	0	$\to$	b
t	a^2	$\to$	a^2-b^2

よって

$$\int_0^b \frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}}\cdot r\,dr = \int_{a^2}^{a^2-b^2}\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\left(-\frac{1}{2}dt\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\int_{a^2}^{a^2-b^2}\frac{1}{\sqrt{t}}dt$$
$$= -\frac{1}{2}\left[2\sqrt{t}\right]_{a^2}^{a^2-b^2}$$
$$= -\left(\sqrt{a^2-b^2}-\sqrt{a^2}\right)$$
$$= a-\sqrt{a^2-b^2}$$

したがって

$$S = 4a\iint_{D'}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$
$$= 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right)d\theta$$
$$= 4a\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta$$
$$= 4a\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right)\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= 4a\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right)\cdot\frac{\pi}{2} = \boldsymbol{2\pi a\left(a-\sqrt{a^2-b^2}\right)}$$

$\boxed{\text{問 11}}$

$$\iint_D f(x,\ y)dxdy = \iint_D xy\,dxdy$$
$$= \int_0^a\left\{\int_0^b xy\,dy\right\}dx$$
$$= \int_0^a x\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^b dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^a xb^2dx$$
$$= \frac{1}{2}b^2\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^a$$
$$= \frac{1}{2}b^2\cdot\frac{1}{2}a^2 = \frac{a^2b^2}{4}$$

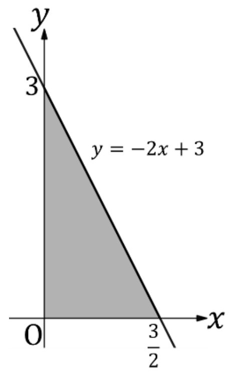
また，$\displaystyle\iint_D dxdy = ab$

よって，求める平均は

$$\frac{\iint_D f(x,\ y)dxdy}{\iint_D dxdy} = \frac{\frac{a^2b^2}{4}}{ab} = \boldsymbol{\frac{ab}{4}}$$

$\boxed{\text{問 12}}$　図形が表す領域をD，重心の座標を$(\overline{x},\ \overline{y})$とする．

（1）領域を図示すると



領域は，$0 \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}$，$0 \leqq y \leqq -2x+3$

よって

$$\iint_D x\,dxdy = \int_0^{\frac{3}{2}}\left\{\int_0^{-2x+3}x\,dy\right\}dx$$
$$= \int_0^{\frac{3}{2}}x\left[y\right]_0^{-2x+3}dx$$
$$= \int_0^{\frac{3}{2}}x(-2x+3)dx$$
$$= \int_0^{\frac{3}{2}}(-2x^2+3x)dx$$
$$= \left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^{\frac{3}{2}}$$
$$= -\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3+\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2$$
$$= -\frac{9}{4}+\frac{27}{8} = \frac{9}{8}$$

また，$\displaystyle\iint_D dxdy = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 3 = \frac{9}{4}$　※三角形の面積

したがって

$$\overline{x} = \frac{\iint_D x\,dxdy}{\iint_D dxdy} = \frac{\frac{9}{8}}{\frac{9}{4}} = \frac{1}{2}$$

また

$$\iint_D y\,dxdy = \int_0^{\frac{3}{2}}\left\{\int_0^{-2x+3}y\,dy\right\}dx$$
$$= \int_0^{\frac{3}{2}}\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{-2x+3}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{3}{2}}(-2x+3)^2dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{3}{2}}(4x^2-12x+9)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}x^3-6x^2+9x\right]_0^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3-6\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2+9\cdot\frac{3}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{18}{4}-\frac{27}{2}+\frac{27}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{2}=\frac{9}{4}$$

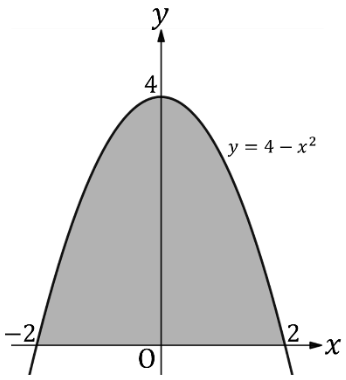
また，$\iint_D dxdy=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 3=\frac{9}{4}$　※三角形の面積

したがって

$$\overline{y}=\frac{\iint_D y\,dxdy}{\iint_D dxdy}=\frac{\frac{9}{4}}{\frac{9}{4}}=1$$

したがって，求める重心の座標は，$\left(\boldsymbol{\frac{1}{2}},\ \boldsymbol{1}\right)$

（２）領域を図示すると



領域Dは，x軸に対して対称だから，$\overline{y}=0$

領域は，$-2\leqq x\leqq 2$，$0\leqq y\leqq 4-x^2$

以上より

$$\iint_D y\,dxdy=\int_{-2}^{2}\left\{\int_0^{4-x^2}y\,dy\right\}dx$$

$$=\int_{-2}^{2}\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{4-x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(4-x^2)^2dx$$

※被積分関数が偶関数

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\int_0^2(16-8x^2+x^4)dx$$

$$=\left[16x-\frac{8}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5\right]_0^2$$

$$=16\cdot 2-\frac{8}{3}\cdot 2^3+\frac{1}{5}\cdot 2^5$$

$$=32-\frac{64}{3}+\frac{32}{5}$$

$$=\frac{480-320+96}{15}$$

$$=\frac{256}{15}$$

また

$$\iint_D dxdy=\int_{-2}^{2}\left\{\int_0^{4-x^2}dy\right\}dx$$

$$=\int_{-2}^{2}\left[y\right]_0^{4-x^2}dx$$

$$=\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx$$

$$=2\int_0^2(4-x^2)dx$$　※被積分関数が偶関数

$$=2\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2$$

$$=2\left(8-\frac{8}{3}\right)$$

$$=2\cdot\frac{16}{3}=\frac{32}{3}$$

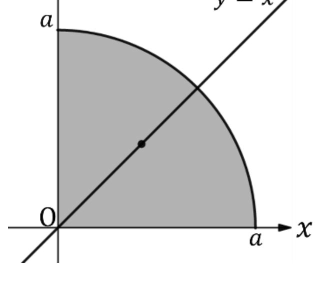
したがって

$$\overline{y}=\frac{\iint_D y\,dxdy}{\iint_D dxdy}=\frac{\frac{256}{15}}{\frac{32}{3}}=\frac{8}{5}$$

したがって，求める重心の座標は，$\left(\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{\frac{8}{5}}\right)$

問 12

図形Dは，直線$y=x$に関して対称だから，$\overline{x}=\overline{y}$



極座標に変換すると，領域Dは次の不等式で

表すことができる．

$$0 \leqq r \leqq a,\ \ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$$

以上より

$$\begin{aligned}
\iint_D x\,dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^a r\cos\theta \cdot r\,dr \right\} d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \cos\theta \int_0^a r^2 dr \right\} d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_0^a d\theta \\
&= \frac{1}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta \\
&= \frac{1}{3} a^3 \Big[\sin\theta \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{3} a^3 (1-0) = \frac{1}{3} a^2
\end{aligned}$$

また

$$\iint_D dxdy = \frac{1}{4} a^2 \pi \quad \text{※図形}D\text{の面積}$$

したがって

$$\overline{x} = \frac{\iint_D x\,dxdy}{\iint_D dxdy} = \frac{\frac{1}{3}a^3}{\frac{1}{4}a^2\pi} = \frac{4a}{3\pi}$$

$\overline{x} = \overline{y} = \dfrac{4a}{3\pi}$ であるから

したがって，求める重心の座標は，$\left(\boldsymbol{\frac{4a}{3\pi}},\ \boldsymbol{\frac{4a}{3\pi}} \right)$