練習問題 2-A

1.

（１）$z_x = 4x^3 - 2y^2$であるから

$z_{xx} = \mathbf{12x^2}$

$z_{xy} = \mathbf{-4y}$

$z_y = -2x \cdot 2y - 3y^2 = -4xy - 3y^2$であるから

$z_{yx} = \mathbf{-4y}$

$z_{yy} = \mathbf{-4x - 6y}$

（２）$z_x = \dfrac{1}{y}$であるから

$z_{xx} = \mathbf{0}$

$z_{xy} = -\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{y^2}}$

$z_y = x \cdot \left(-\dfrac{1}{y^2}\right) = -\dfrac{x}{y^2}$であるから

$z_{yx} = -\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{y^2}}$

$z_{yy} = -x \cdot \left(-\dfrac{2}{y^3}\right) = \dfrac{\boldsymbol{2x}}{\boldsymbol{y^3}}$

（３）$z_x = \dfrac{1}{x^2 - y^2} \cdot 2x = \dfrac{2x}{x^2 - y^2}$であるから

$$z_{xx} = \frac{2 \cdot (x^2 - y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2y^2 - 4x^2}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$= \frac{-2x^2 - 2y^2}{(x^2 - y^2)^2} = -\frac{\boldsymbol{2(x^2 + y^2)}}{\boldsymbol{(x^2 - y^2)^2}}$$

$$z_{xy} = \frac{-2x \cdot (-2y)}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$= \frac{\boldsymbol{4xy}}{\boldsymbol{(x^2 - y^2)^2}}$$

$z_y = \dfrac{1}{x^2 - y^2} \cdot (-2y) = \dfrac{-2y}{x^2 - y^2}$であるから

$$z_{yx} = \frac{-(-2y) \cdot 2x}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$= \frac{\boldsymbol{4xy}}{\boldsymbol{(x^2 - y^2)^2}}$$

$$z_{yy} = \frac{-2 \cdot (x^2 - y^2) - (-2y) \cdot (-2y)}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$= \frac{-2x^2 + 2y^2 - 4y^2}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$= \frac{-2x^2 - 2y^2}{(x^2 - y^2)^2} = -\frac{\boldsymbol{2(x^2 + y^2)}}{\boldsymbol{(x^2 - y^2)^2}}$$

（４）$z_x = y^x \log y$であるから

$z_{xx} = y^x \log y \cdot \log y$

$= \boldsymbol{y^x(\log y)^2}$

$z_{xy} = xy^{x-1} \log y + y^x \cdot \dfrac{1}{y}$

$= xy^{x-1} \log y + y^{x-1}$

$= \boldsymbol{(x \log y + 1)y^{x-1}}$

$z_y = xy^{x-1}$であるから

$z_{yx} = 1 \cdot y^{x-1} + x \cdot y^{x-1} \log y$

$= y^{x-1} + xy^{x-1} \log y$

$= \boldsymbol{(x \log y + 1)y^{x-1}}$

$z_{yy} = \boldsymbol{x(x-1)y^{x-2}}$

2.

$$z = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$z_x = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

$$= x(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$z_{xx} = (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} + x\left\{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \frac{x^2 + y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \frac{y^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$$

$$z_{xy} = x\left\{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2y\right\}$$

$$= -\frac{xy}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$$

$$z_y = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y$$

$$= y(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$z_{yy} = (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} + y\left\{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2y\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$= \frac{x^2+y^2-y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$= \frac{x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

（1）$左辺 = \sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} + \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\right)$
$$= \sqrt{x^2+y^2} \cdot \frac{y^2+x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$= \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1 = 右辺$$

（2）$左辺 = \left\{-\frac{xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\right\}^2$
$$= \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^3}$$
$$右辺 = \frac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$
$$= \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^3}$$
よって，左辺＝右辺

3.

（1）$f(x,\ y) = x^3 + y^4 - 27x - 32y$とおくと
$f_x(x,\ y) = 3x^2 - 27$
$f_y(x,\ y) = 4y^3 - 32$
$f_x(x,\ y) = 0$より，$x^2 = 9$であるから，$x = \pm 3$
$f_y(x,\ y) = 0$より，$y^3 = 8$であるから，$y = 2$
よって，極値をとり得る点は，$(\pm 3,\ 2)$である．
第 2 次導関数は
$f_{xx}(x,\ y) = 6x$，$f_{xy}(x,\ y) = 0$，$f_{yy}(x,\ y) = 12y^2$
であるから，$(3,\ 2)$に対して
$$H = f_{xx}(3,\ 2)f_{yy}(3,\ 2) - \{f_{xy}(3,\ 2)\}^2$$
$$= (6 \cdot 3) \cdot (12 \cdot 2^2) - 0^2$$
$$= 18 \cdot 48 - 0 = 864 > 0$$
また，$f_{xx}(3,\ 2) = 18 > 0$
以上より，$f(x,\ y)$は，点$(3,\ 2)$で極小となる．
極小値は
$$f(3,\ 2) = 3^3 + 2^4 - 27 \cdot 3 - 32 \cdot 2$$
$$= 27 + 16 - 81 - 64$$
$$= -102$$
また，$(-3,\ 2)$に対して
$$H = f_{xx}(-3,\ 2)f_{yy}(-3,\ 2) - \{f_{xy}(-3,\ 2)\}^2$$
$$= \{6 \cdot (-3)\} \cdot (12 \cdot 2^2) - 0^2$$
$$= -18 \cdot 48 - 0 = -864 < 0$$
よって，$f(x,\ y)$は，点$(-3,\ 2)$では極値をとらない．
以上より，zは，**点$(3,\ 2)$で極小値-102をとる．**

（2）$f(x,\ y) = -3x^2 + 4x\sqrt{y} + 4x - 2y - 4$とおくと
$f_x(x,\ y) = -6x + 4\sqrt{y} + 4$
$$f_y(x,\ y) = 4x \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} - 2$$
$$= \frac{2x}{\sqrt{y}} - 2$$
$f_y(x,\ y) = 0$ より，$\frac{x}{\sqrt{y}} = 1$，すなわち，$\sqrt{y} = x$
$f_x(x,\ y) = 0$より，$-6x + 4\sqrt{y} + 4 = 0$であるから，
これに，$\sqrt{y} = x$を代入して
$$-6x + 4 \cdot x + 4 = 0$$
$$-2x = -4$$
$$x = 2$$
これより，$\sqrt{y} = 2$，すなわち，$y = 4$
よって，極値をとり得る点は，$(2,\ 4)$である．
第 2 次導関数は
$$f_{xx}(x,\ y) = -6,\ f_{xy}(x,\ y) = \frac{2}{\sqrt{y}},\ f_{yy}(x,\ y) = -\frac{x}{y\sqrt{y}}$$
であるから，$(2,\ 4)$に対して
$$H = f_{xx}(2,\ 4)f_{yy}(2,\ 4) - \{f_{xy}(2,\ 4)\}^2$$
$$= -6 \cdot \left(-\frac{2}{4\sqrt{4}}\right) - \left(\frac{2}{\sqrt{4}}\right)^2$$
$$= -6 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 > 0$$
また，$f_{xx}(2,\ 4) = -6 < 0$
以上より，$f(x,\ y)$は，点$(2,\ 4)$で極大となる．
極大値は
$$f(2,\ 4) = -3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2\sqrt{4} + 4 \cdot 2 - 2 \cdot 4 - 4$$
$$= -12 + 16 + 8 - 8 - 4$$
$$= 0$$
以上より，zは，**点$(2,\ 4)$で極大値0をとる．**

4.

$\varphi(x,\ y) = \frac{x^2}{9} + y^2 - 1$ とおくと

$\varphi_x(x,\ y) = \frac{2}{9}x$

$\varphi_y(x,\ y) = 2y$

（1）$z_x = 1$，$z_y = 3$であるから，zが極値をとり得る点で，次の式が成り立つ．

$$\frac{1}{\frac{2}{9}x} = \frac{3}{2y}$$

$$\frac{9}{2x} = \frac{3}{2y}$$

$$\frac{3}{x} = \frac{1}{y}$$

これより，$x = 3y$であるから，

これを，$\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ に代入して

$$\frac{(3y)^2}{9} + y^2 = 1$$

$$\frac{9y^2}{9} + y^2 = 1$$

$$2y^2 = 1$$

$$y^2 = \frac{1}{2}$$

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

また，$x = 3y = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$

よって

極値をとり得る点は，$\left(\pm\frac{3}{\sqrt{2}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$（複号同順）

である．

ここで，曲線$\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 上の点を，

$x = 3\cos\theta$，$y = \sin\theta$と表せば，zはθの連続関数であるから最大値，最小値をもち，曲線上に端点はないので，最大値，最小値は極値をとり得る点でとる．それぞれの点におけるzの値を求めると

$\left(\frac{3}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$のとき，$z = \frac{3}{\sqrt{2}} + 3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2\cdot 3}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

$\left(\frac{3}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$のとき，$z = \frac{3}{\sqrt{2}} + 3\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$

$\left(-\frac{3}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$のとき，$z = -\frac{3}{\sqrt{2}} + 3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 0$

$\left(-\frac{3}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$のとき，$z = -\frac{3}{\sqrt{2}} + 3\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$= -\frac{2\cdot 3}{\sqrt{2}} = -3\sqrt{2}$$

よって

点$\left(\frac{3}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$において，最大値$3\sqrt{2}$

点$\left(-\frac{3}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$において，最小値$-3\sqrt{2}$

（2）$z_x = 2y$，$z_y = 2x$であるから，zが極値をとり得る点で，次の式が成り立つ．

$$\frac{2y}{\frac{2}{9}x} = \frac{2x}{2y}$$

$$\frac{9y}{x} = \frac{x}{y}$$

これより，$x^2 = 9y^2$であるから，

これを，$\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ に代入して

$$\frac{9y^2}{9} + y^2 = 1$$

$$2y^2 = 1$$

$$y^2 = \frac{1}{2}$$

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

また，$x^2 = 9y^2 = \frac{9}{2}$より，$y = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$

よって

極値をとり得る点は，$\left(\pm\frac{3}{\sqrt{2}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$（複号は任意）

である．

ここで，曲線$\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 上の点を，

$x = 3\cos\theta$，$y = \sin\theta$と表せば，zはθの連続関数であるから最大値，最小値をもち，曲線上に端点はないので，最大値，最小値は極値をとり得る点でとる．それぞれの点におけるzの値を求めると

$\left(\pm\frac{3}{\sqrt{2}},\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$（複号同順）のとき

$$z = 2\cdot\left(\pm\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3$$

$\left(\pm\dfrac{3}{\sqrt{2}},\ \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$（複号同順）のとき

$$z = 2\cdot\left(\pm\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3$$

よって

点$\left(\pm\dfrac{3}{\sqrt{2}},\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$（複号同順）において，最大値3

点$\left(\pm\dfrac{3}{\sqrt{2}},\ \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$(複号同順)において，最大値$-3$

5.

（１）$f(x,\ y,\ z) = xyz - a^3$とおく．

$f_x(x,\ y,\ z) = yz$

$f_y(x,\ y,\ z) = zx$

$f_z(x,\ y,\ z) = xy$

よって，求める接平面の方程式は

$y_0z_0(x - x_0) + z_0x_0(y - y_0) + x_0y_0(z - z_0) = 0$

整理すると

$y_0z_0x - x_0y_0z_0 + z_0x_0y - x_0y_0z_0 + x_0y_0z - x_0y_0z_0 = 0$

$y_0z_0x + z_0x_0y + x_0y_0z = 3x_0y_0z_0$

ここで，点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0,\ z_0)$は，曲面$xyz = a^3$上にあるから

$x_0y_0z_0 = a^3$

したがって，$\boldsymbol{y_0z_0x + z_0x_0y + x_0y_0z = 3a^3}$

（２）平面と各座標軸との交点の座標を求める．

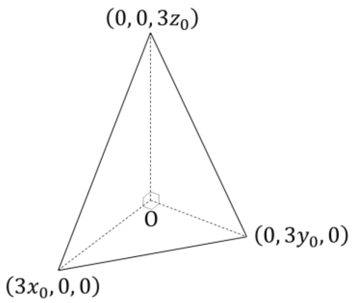
$y_0z_0x + z_0x_0y + x_0y_0z = 3x_0y_0z_0$において，

$y = 0$，$z = 0$とすれば，$x = 3x_0$

よって，接平面とx軸との交点は，$(3x_0,\ 0,\ 0)$

同様にして，接平面とy軸との交点は，$(0,\ 3y_0,\ 0)$

接平面とz軸との交点は，$(0,\ 0,\ 3z_0)$



よって，求める三角錐の体積は

$$\frac{1}{2}|3x_0||3y_0| \times |3z_0| \times \frac{1}{3} = \frac{9}{2}|x_0y_0z_0|$$

$$= \frac{9}{2}|a^3|$$

ここで，aは正の定数なので，$\dfrac{9}{2}|a^3| = \boldsymbol{\dfrac{9}{2}a^3}$

6.

直円柱の底面の半径をx，高さをyとおく．

表面積が一定であるから，

$2\pi x^2 + 2\pi xy = c$（cは正の定数）とするときの，

$V = \pi x^2 y$の最大値を考えればよい．

$\varphi(x,\ y) = 2\pi x^2 + 2\pi xy - c$とすれば

$\varphi_x = 4\pi x + 2\pi y$，$\varphi_y = 2\pi x$

また，$V_x = 2\pi xy$，$V_y = \pi x^2$

よって，$\dfrac{2\pi xy}{4\pi x + 2\pi y} = \dfrac{\pi x^2}{2\pi x}$より，$\dfrac{y}{2x + y} = \dfrac{1}{2}$

すなわち，$y = 2x$

これを，$2\pi x^2 + 2\pi xy = c$に代入して

$2\pi x^2 + 4\pi x^2 = c$

$6\pi x^2 = c$

$$x^2 = \frac{c}{6\pi}$$

$x > 0$より，これを満たすxはただ 1 つ存在する．

最大値が存在し，極値をとり得る点が 1 つであるから，

この点が最大値を与える点である．

このとき，$y = 2x$であるから，半径と高さの比は

$x : y = x : 2x = \mathbf{1 : 2}$

7.

$f(x,\ y,\ \alpha) = x + \alpha y^2 + \dfrac{1}{\alpha}$とおくと

$f_\alpha(x,\ y,\ \alpha) = y^2 - \dfrac{1}{\alpha^2}$

したがって，包絡線の方程式は，次の 2 式からαを消去すれば得られる．

$$\begin{cases} x + \alpha y^2 + \dfrac{1}{\alpha} = 0 & \cdots ① \\ y^2 - \dfrac{1}{\alpha^2} = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

②より，$y^2 = \dfrac{1}{\alpha^2}$ ・・・②′

これを，①に代入して

$$x + \alpha\cdot\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} = 0$$

これより，$x = -\dfrac{2}{\alpha}$ ・・・③

③より

$x^2 = \left(-\frac{2}{\alpha}\right)^2 = \frac{4}{\alpha^2}$ ・・・③′

②より，$\alpha^2 = \frac{1}{y^2}$，③より，$\alpha^2 = \frac{4}{x^2}$であるから

$\frac{1}{y^2} = \frac{4}{x^2}$

よって，包絡線の方程式は，$x^2 = 4y^2$

すなわち，$\boldsymbol{x \pm 2y = 0}$

練習問題 2-B

1.

$f_y(x_0, y_0) \neq 0$のとき，陰関数の微分法より，

$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}$

よって，点$\mathrm{P}(x_0, y_0)$における接線の方程式は

$y - y_0 = -\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}(x - x_0)$

変形すると

$f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = -f_x(x_0, y_0)(x - x_0)$

すなわち

$f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) = 0$

$f_y(x_0, y_0) = 0$のとき，$f_x(x_0, y_0) = 0$となる点は特異点となるので，$f_x(x_0, y_0) \neq 0$

このとき，$\frac{dx}{dy} = -\frac{f_y}{f_x}$であるから，

点$\mathrm{P}(x_0, y_0)$における接線の方程式は

$x - x_0 = -\frac{f_y(x_0, y_0)}{f_x(x_0, y_0)}(y - y_0)$

変形すると

$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) = -f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

すなわち

$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$

2.

（1）$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$ とすると

$f_x(x, y) = \frac{2x}{a^2}$

$f_y(x, y) = \frac{2y}{b^2}$

よって，求める接線の方程式は

$\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) = 0$

整理すると

$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{{x_0}^2}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} - \frac{{y_0}^2}{b^2} = 0$

$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = \frac{{x_0}^2}{a^2} + \frac{{y_0}^2}{b^2}$

$\mathrm{P}(x_0, y_0)$は楕円上の点であるから，$\frac{{x_0}^2}{a^2} + \frac{{y_0}^2}{b^2} = 1$

したがって，$\boldsymbol{\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1}$

（2）$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$ とすると

$f_x(x, y) = \frac{2x}{a^2}$

$f_y(x, y) = -\frac{2y}{b^2}$

よって，求める接線の方程式は

$\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) - \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) = 0$

整理すると

$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{{x_0}^2}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{{y_0}^2}{b^2} = 0$

$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = \frac{{x_0}^2}{a^2} - \frac{{y_0}^2}{b^2}$

$\mathrm{P}(x_0, y_0)$は双曲線上の点であるから，$\frac{{x_0}^2}{a^2} - \frac{{y_0}^2}{b^2} = 1$

したがって，$\boldsymbol{\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1}$

（3）$f(x, y) = y^2 - 4px$とすると

$f_x(x, y) = -4p$

$f_y(x, y) = 2y$

よって，求める接線の方程式は

$-4p(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) = 0$

整理すると

$-2px + 2px_0 + y_0 y - {y_0}^2 = 0$

$y_0 y = 2px - 2px_0 + {y_0}^2$

$\mathrm{P}(x_0, y_0)$は放物線上の点であるから，${y_0}^2 = 4px_0$

したがって

$y_0 y = 2px - 2px_0 + 4px_0$

$y_0 y = 2px + 2px_0$

すなわち，$\boldsymbol{y_0 y = 2p(x + x_0)}$

3.

円の中心はx軸上にあるので，円の中心の座標を$(\alpha,\ 0)$とすれば，半径は$\sqrt{a^2-\alpha^2}$となるので，円の方程式は

$(x-\alpha)^2+y^2=a^2-\alpha^2$

これより，$(x-\alpha)^2+y^2-a^2+\alpha^2=0$

$f(x,\ y,\ \alpha)=(x-\alpha)^2+y^2-a^2+\alpha^2$とおくと

$$f_\alpha(x,\ y,\ \alpha)=2(x-\alpha)\cdot(-1)+2\alpha$$
$$=-2(x-\alpha)+2\alpha$$

したがって，包絡線の方程式は，次の 2 式からαを消去すれば得られる．

$$\begin{cases}(x-\alpha)^2+y^2-a^2+\alpha^2=0 & \cdots ① \\ -2(x-\alpha)+2\alpha=0 & \cdots ②\end{cases}$$

②より，$-2x+2\alpha+2\alpha=0$

すなわち，$x=2\alpha$

これより，$\alpha=\dfrac{x}{2}$

これを①に代入して

$$\left(x-\frac{x}{2}\right)^2+y^2-a^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=0$$

$$\frac{x^2}{4}+y^2-a^2+\frac{x^2}{4}=0$$

$$\frac{x^2}{2}+y^2=a^2$$

すなわち，求める包絡線は楕円$\boldsymbol{\dfrac{x^2}{2}+y^2=a^2}$である．

4.

$\varphi(x,\ y,\ z)=0$を満たすzが$x,\ y$の関数とすると，陰関数の微分法により

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{\varphi_x}{\varphi_z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{\varphi_y}{\varphi_z}\end{cases} \quad \cdots ①$$

このとき，$w=f(x,\ y,\ z)$は$x,\ y$の関数となり，wが極値をとる点において

$$\begin{cases}w_x=f_x+f_z\dfrac{\partial z}{\partial x}=0 \\ w_y=f_y+f_z\dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$$

が成り立つ．①を代入して

$$\begin{cases}f_x-f_z\dfrac{\varphi_x}{\varphi_z}=0 \text{ より，} f_x=\dfrac{f_z}{\varphi_z}\varphi_x \\ f_y-f_z\dfrac{\varphi_y}{\varphi_z}=0 \text{ より，} f_y=\dfrac{f_z}{\varphi_z}\varphi_y\end{cases}$$

ここで，$\dfrac{f_z}{\varphi_z}=\lambda$（$f_z=\lambda\varphi_z$）とおけば

$f_x=\lambda\varphi_x,\ f_y=\lambda\varphi_y$

以上より，極値をとる点において，

$f_x=\lambda\varphi_x,\ f_y=\lambda\varphi_y,\ f_z=\lambda\varphi_z$を満たす$\lambda$が存在する．

5.

縦，横，高さが$x,\ y,\ z$の直方体であるから，$\boldsymbol{V=xyz}$

$\varphi(x,\ y,\ z)=\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{36}+\dfrac{z^2}{16}-1$ とおくと，

$\varphi(x,\ y,\ z)=0$のときの$V=xyz$（$x>0,\ y>0,\ z>0$）の最大値を求めればよい．

ここで，$\varphi_x=\dfrac{2}{9}x$，$\varphi_y=\dfrac{1}{18}y$，$\varphi_z=\dfrac{1}{8}z$

また，$V_x=yz,\ V_y=xz,\ V_z=xy$

よって，極値をとる点において，次の等式を満たすλが存在する．

$$yz=\frac{2}{9}\lambda x,\quad xz=\frac{1}{18}\lambda y,\quad xy=\frac{1}{8}\lambda z$$

3 式をλについて解くと

$$\begin{cases}\lambda=\dfrac{9yz}{2x} & \cdots ① \\ \lambda=\dfrac{18zx}{y} & \cdots ② \\ \lambda=\dfrac{8xy}{z} & \cdots ③\end{cases}$$

①，②より，$\dfrac{9yz}{2x}=\dfrac{18zx}{y}$

これより，$y^2=4x^2 \cdots ④$

①，③より，$\dfrac{9yz}{2x}=\dfrac{8xy}{z}$

これより，$9z^2=16x^2$，すなわち，$z^2=\dfrac{16}{9}x^2 \cdots ⑤$

④，⑤を$\varphi(x,\ y,\ z)=0$に代入すると

$$\frac{x^2}{9}+\frac{4x^2}{36}+\frac{\frac{16}{9}x^2}{16}-1=0$$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{x^2}{9}+\frac{x^2}{9}-1=0$$

$$\frac{x^2}{3}=1$$

$$x^2=3$$

$x > 0$ より，$x = \sqrt{3}$

④より，$y^2 = 4 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 = 12$

$y > 0$ より，$y = 2\sqrt{3}$

⑤より，$z^2 = \dfrac{16}{9} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 = \dfrac{16}{3}$

$z > 0$ より，$z = \dfrac{4}{\sqrt{3}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

よって，V は点 $\left(\sqrt{3},\ 2\sqrt{3},\ \dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ で最大値をとり，

その値は，$V = \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \dfrac{4\sqrt{3}}{3} = \mathbf{8\sqrt{3}}$