２章　偏微分

問１

（１）$z_y = 3x \cdot 2y - 3y^2 = 6xy - 3y^2$

よって

$z_{yx} = \mathbf{6y}$

$z_{yy} = \mathbf{6x - 6y}$

（２）$z_y = \dfrac{2y}{x^2 + y^2}$

よって

$$z_{yx} = \frac{-2y \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= -\boldsymbol{\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}}$$

$$z_{yy} = \frac{2(x^2 + y^2) - 2y \cdot 2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 2y^2 - 4y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \boldsymbol{\frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}}$$

問２

（１）$z_x = 2 \cdot 4x^3 - 3 \cdot 3x^2 \cdot y^4 = 8x^3 - 9x^2y^4$

よって

$z_{xx} = 8 \cdot 3x^2 - 9 \cdot 2x \cdot y^4$

$= \mathbf{24x^2 - 18xy^4}$

$z_{xy} = -9x^2 \cdot 4y^3$

$= \mathbf{-36x^2y^3}$

$z_y = -3x^3 \cdot 4y^3 = -12x^3y^3$

よって

$z_{yx} = -12 \cdot 3x^2 \cdot y^3$

$= \mathbf{-36x^2y^3}$

$z_{yy} = -12x^3 \cdot 3y^2$

$= \mathbf{-36x^3y^2}$

（２）$z_x = e^{xy} \cdot y = ye^{xy}$

よって

$z_{xx} = ye^{xy} \cdot y$

$= \mathbf{y^2e^{xy}}$

$z_{xy} = 1 \cdot e^{xy} + ye^{xy} \cdot x$

$= \mathbf{(1 + xy)e^{xy}}$

$z_y = e^{xy} \cdot x = xe^{xy}$

よって

$z_{yx} = 1 \cdot e^{xy} + xe^{xy} \cdot y$

$= \mathbf{(1 + xy)e^{xy}}$

$z_{yy} = xe^{xy} \cdot x$

$= \mathbf{x^2e^{xy}}$

（３）$z_x = \cos 3x \cos 4y \cdot 3 = 3\cos 3x \cos 4y$

よって

$z_{xx} = 3 \cdot (-\sin 3x) \cdot 3 \cdot \cos 4y$

$= \mathbf{-9\sin 3x \cos 4y}$

$z_{xy} = 3\cos 3x \cdot (-\sin 4y) \cdot 4$

$= \mathbf{-12\cos 3x \sin 4y}$

$z_y = \sin 3x \cdot (-\sin 4y) \cdot 4 = -4\sin 3x \sin 4y$

よって

$z_{yx} = -4\cos 3x \cdot 3 \cdot \sin 4y$

$= \mathbf{-12\cos 3x \sin 4y}$

$z_{yy} = -4\sin 3x \cos 4y \cdot 4$

$= \mathbf{-16\sin 3x \cos 4y}$

（４）$z_x = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot 2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}$

よって

$$z_{xx} = \frac{\sqrt{x^2 - y^2} - x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot 2x}{\left(\sqrt{x^2 - y^2}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 - y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - y^2}}}{x^2 - y^2}$$

$$= \frac{x^2 - y^2 - x^2}{(x^2 - y^2)\sqrt{x^2 - y^2}}$$

$$= -\boldsymbol{\frac{y^2}{(x^2 - y^2)\sqrt{x^2 - y^2}}}$$

$$z_{xy} = \frac{-x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot (-2y)}{\left(\sqrt{x^2 - y^2}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2 - y^2}}}{x^2 - y^2}$$

$$= \boldsymbol{\frac{xy}{(x^2 - y^2)\sqrt{x^2 - y^2}}}$$

$$z_y = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot (-2y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$$

よって

$$z_{yx} = \frac{-(-y) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot 2x}{\left(\sqrt{x^2 - y^2}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2 - y^2}}}{x^2 - y^2}$$

$$= \boldsymbol{\frac{xy}{(x^2 - y^2)\sqrt{x^2 - y^2}}}$$

$$z_{yy} = \frac{-1 \cdot \sqrt{x^2 - y^2} - (-y) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot (-2y)}{\left(\sqrt{x^2 - y^2}\right)^2}$$

$$= \frac{-\sqrt{x^2 - y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2 - y^2}}}{x^2 - y^2}$$

$$= \frac{-(x^2 - y^2) - y^2}{x^2 - y^2\sqrt{x^2 - y^2}}$$

$$= -\boldsymbol{\frac{x^2}{(x^2 - y^2)\sqrt{x^2 - y^2}}}$$

問３

（１）$z_x = 4x^3y^3 - 2xy$

これより

$$z_{xy} = 4x^3 \cdot 3y^2 - 2x$$
$$= 12x^3y^2 - 2x$$

$$z_y = x^4 \cdot 3y^2 - x^2$$
$$= 3x^4y^2 - x^2$$

これより

$$z_{yx} = 12x^3y^2 - 2x$$

以上より，$\boldsymbol{z_{xy} = z_{yx}}$

また

$z_{xx} = 12x^2y^3 - 2y$ より，

$$z_{xxy} = 12x^2 \cdot 3y^2 - 2 = 36x^2y^2 - 2$$

$z_{xy} = 12x^3y^2 - 2x$ より，

$$z_{xyx} = 36x^2y^2 - 2$$

$z_{yx} = 12x^3y^2 - 2x$ より，

$$z_{yxx} = 36x^2y^2 - 2$$

以上より，$\boldsymbol{z_{xxy} = z_{xyx} = z_{yxx}}$

（２）$z_x = \cos(2x - y) \cdot 2 = 2\cos(2x - y)$

これより

$$z_{xy} = 2 \cdot \{-\sin(2x - y)\} \cdot (-1)$$
$$= 2\sin(2x - y)$$

$$z_y = \cos(2x - y) \cdot (-1)$$
$$= -\cos(2x - y)$$

これより

$$z_{yx} = -\{-\sin(2x - y)\} \cdot 2$$
$$= 2\sin(2x - y)$$

以上より，$\boldsymbol{z_{xy} = z_{yx}}$

また

$$z_{xx} = 2 \cdot \{-\sin(2x - y)\} \cdot 2$$
$= -4\sin(2x - y)$ より

$$z_{xxy} = -4\cos(2x - y) \cdot (-1)$$
$$= 4\cos(2x - y)$$

$z_{xy} = 2\sin(2x - y)$ より

$$z_{xyx} = 2\cos(2x - y) \cdot 2$$
$$= 4\cos(2x - y)$$

$z_{yx} = 2\sin(2x - y)$ より

$$z_{yxx} = 2\cos(2x - y) \cdot 2$$
$$= 4\cos(2x - y)$$

以上より，$\boldsymbol{z_{xxy} = z_{xyx} = z_{yxx}}$

問４

$z_x = 2x$ より，$z_{xx} = 2$，$z_{xy} = 0$

$z_y = -2y$ より，$z_{yy} = -2$

よって

$$\frac{d^2z}{dt^2} = h^2z_{xx} + 2hkz_{xy} + k^2z_{yy}$$
$$= h^2 \cdot 2 + 2hk \cdot 0 + k^2 \cdot (-2)$$
$$= \boldsymbol{2h^2 - 2k^2}$$

問５

（１）$z_x = 2x - y - 4$

$z_y = -x + 4y + 2$

よって，極値をとり得る点の座標が満たす必要条件は

$$\begin{cases} 2x - y - 4 = 0 & \cdot\cdot\cdot ① \\ -x + 4y + 2 = 0 & \cdot\cdot\cdot ② \end{cases}$$

①より，$y = 2x - 4$

これを，②に代入して

$$-x + 4(2x - 4) + 2 = 0$$
$$-x + 8x - 16 + 2 = 0$$
$$7x = 14$$
$$x = 2$$

これより，$y=2\cdot 2-4=0$

したがって，極値をとり得る点は，**$(2,\ 0)$**

（２）$z_x=12x^2-4y$

$z_y=-4x+4y$

よって，極値を取り得る点が満たす必要条件は

$$\begin{cases} 12x^2-4y \cdot\cdot\cdot ① \\ -4x+4y \ \cdot\cdot\cdot ② \end{cases}$$

②より，$y=x$

これを，①に代入して

$12x^2-4x=0$

$3x^2-x=0$

$x(3x-1)=0$

$x=0,\ \dfrac{1}{3}$

$x=0$のとき，$y=0$

$x=\dfrac{1}{3}$のとき，$y=\dfrac{1}{3}$

したがって，極値をとり得る点は，**$(0,\ 0)$，$\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$**

$\boxed{問6}$

（１）$z_x=2x-y-4=0$

$z_y=-x+4y+2=0$

これを解いて，$x=2$，$y=0$

よって，極値をとり得る点は，$(2,\ 0)$

第２次導関数は

$z_{xx}=2$，$z_{xy}=-1$，$z_{yy}=4$であるから，

$(2,\ 0)$に対して

$H=2\cdot 4-(-1)^2$

$=7>0$

また，$z_{xx}=2>0$

以上より，zは，点$(2,\ 0)$で極小となる．

極小値は

$z=2^2-2\cdot 0+2\cdot 0^2-4\cdot 2+2\cdot 0$

$=4-8=-4$

よって，zは，**点$(2,\ 0)$で極小値-4をとる．**

（２）$z_x=-\sin x=0$

$z_y=-\cos y=0$

$-\pi<x<\pi$，$-\pi<y<\pi$において

$x=0$，$y=\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2}$

よって，極値をとり得る点は，$\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，$\left(0,\ -\dfrac{\pi}{2}\right)$

第２次導関数は

$z_{xx}=-\cos x$，$z_{xy}=0$，$z_{yy}=\sin y$であるから，

$\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$に対して

$H=-\cos 0\cdot\sin\dfrac{\pi}{2}-0=-1<0$

よって，$\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$で極値をとらない．

$\left(0,\ -\dfrac{\pi}{2}\right)$に対して

$H=-\cos 0\cdot\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)-0=1>0$

また，$z_{xx}=-\cos 0=-1<0$

以上より，zは，点$\left(0,\ -\dfrac{\pi}{2}\right)$で極大となる．

極大値は

$z=\cos 0-\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$

$=1-(-1)=2$

よって，zは，**点$\left(0,\ -\dfrac{\pi}{2}\right)$で極大値2をとる．**

（３）$z_x=e^x(x+2y^2)+e^x\cdot 1=e^x(x+2y^2+1)=0$

$z_y=4ye^x=0$

$e^x\neq 0$より

$$\begin{cases} x+2y^2+1=0 \quad \cdot\cdot\cdot ① \\ y=0 \qquad\qquad\quad \cdot\cdot\cdot ② \end{cases}$$

②を，①に代入して

$x+1=0$，すなわち，$x=-1$

よって，極値をとり得る点は，$(-1,\ 0)$

第２次導関数

$z_{xx}=e^x(x+2y^2+1)+e^x\cdot 1$

$=e^x(x+2y^2+2)$

$z_{xy}=4ye^x$

$z_{yy}=4e^x$

であるから，$(-1,\ 0)$に対して

$H=e^{-1}(-1+2\cdot 0^2+2)\cdot 4e^{-1}$

$=12e^{-2}>0$

また

$z_{xx}=e^{-1}(-1+2\cdot 0^2+2)$

$=3e^{-1}>0$

以上より，zは，点$(-1,\ 0)$で極小となる．

極小値は

$z=e^{-1}(-1+2\cdot 0^2)$

$=-e^{-1}$

$$=-\frac{1}{e}$$

よって，zは，**点$(-1,\ 0)$で極小値$-\dfrac{1}{e}$をとる．**

$\boxed{\text{問7}}$

（1）$f=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-1$とおくと

$$f_x=\frac{2x}{4}=\frac{1}{2}x$$

$$f_y=\frac{2y}{9}=\frac{2}{9}y$$

よって

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{1}{2}x}{\frac{2}{9}y}$$

$$=-\boldsymbol{\frac{9x}{4y}}$$

（2）$f=x-2y+\log x+\log y-1$とおくと

$$f_x=1+\frac{1}{x}$$

$$f_y=-2+\frac{1}{y}$$

よって

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1+\frac{1}{x}}{-2+\frac{1}{y}}=-\frac{xy+y}{-2xy+x}$$

$$=-\boldsymbol{\frac{y(x+1)}{x(1-2y)}}$$

（3）$f=x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}-4$とおくと

$$f_x=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$f_y=\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}$$

よって

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}}{\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}}=-\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}}$$

$$=-\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$$

$$=-\sqrt[3]{\boldsymbol{\frac{y}{x}}}$$

（4）$f=xe^y-ye^x$とおくと

$f_x=e^y-ye^x$

$f_y=xe^y-e^x$

よって

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{e^y-ye^x}{xe^y-e^x}=\boldsymbol{\frac{ye^x-e^y}{xe^y-e^x}}$$

$\boxed{\text{問8}}$

（1）$f=x^2+y^2-2zx-2yz-1$とおくと

$f_x=2x-2z$

$f_y=2y-2z$

$f_z=-2x-2y$

よって，$-2x-2y\neq 0$のとき

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x-2z}{-2x-2y}=\boldsymbol{\frac{x-z}{x+y}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2y-2z}{-2x-2y}=\boldsymbol{\frac{y-z}{x+y}}$$

（2）$f=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx-1$とおくと

$f_x=2x-y-z$

$f_y=2y-x-z$

$f_z=2z-x-y$

よって，$2z-y-x\neq 0$のとき

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\boldsymbol{\frac{2x-y-z}{2z-x-y}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\boldsymbol{\frac{2y-x-z}{2z-x-y}}$$

$\boxed{\text{問9}}$

（1）$f(x,\ y,\ z)=x^2+y^2-z^2-1$とおくと

$f_x(x,\ y,\ z)=2x$

$f_y(x,\ y,\ z)=2y$

$f_z(x,\ y,\ z)=-2z$

これより

$f_x(1,\ 2,\ 2)=2\cdot 1=2$

$f_y(1,\ 2,\ 2)=2\cdot 2=4$

$f_z(1,\ 2,\ 2) = -2 \cdot 2 = -4$

よって，点$(1,\ 2,\ 2)$における接平面の方程式は

$2(x-1) + 4(y-2) - 4(z-2) = 0$

$2x - 2 + 4y - 8 - 4z + 8 = 0$

$2x + 4y - 4z = 2$

$\boldsymbol{x + 2y - 2z = 1}$

（３）$f(x,\ y,\ z) = x^2 + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{4} - 3$ とおくと

$f_x(x,\ y,\ z) = 2x$

$f_y(x,\ y,\ z) = \dfrac{2y}{4} = \dfrac{1}{2}y$

$f_z(x,\ y,\ z) = \dfrac{2z}{4} = \dfrac{1}{2}z$

これより

$f_x(1,\ 2,\ 2) = 2 \cdot 1 = 2$

$f_y(1,\ 2,\ 2) = \dfrac{1}{2} \cdot 2 = 1$

$f_z(1,\ 2,\ 2) = \dfrac{1}{2} \cdot 2 = 1$

よって，点$(1,\ 2,\ 2)$における接平面の方程式は

$2(x-1) + 1(y-2) + 1(z-2) = 0$

$2x - 2 + y - 2 + z - 2 = 0$

$\boldsymbol{2x + y + z = 6}$

$\boxed{\text{問 10}}$

$\varphi(x,\ y) = x^2 + y^2 - 1$，$f(x,\ y) = xy$とおく．

$\varphi_x = 2x$，$\varphi_y = 2y$

また，$f_x = y$，$f_y = x$

よって，$\dfrac{y}{2x} = \dfrac{x}{2y}$ より，$x^2 = y^2$・・・①

これを，$x^2 + y^2 = 1$に代入して

$2x^2 = 1$

$x^2 = \dfrac{1}{2}$

$x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

①に代入して

$\dfrac{1}{2} = y^2$

$y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

以上より，極値をとり得る点は

$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$，$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$，

$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$，$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

例題 6 と同様に，最大値・最小値は極値とり得る点でとることとなる．

各点におけるzの値を求めると

$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$のとき，$z = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$

$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$のとき，$z = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{1}{2}$

$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$のとき，$z = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{2}$

$\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$のとき，$z = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{2}$

以上より

点$\boldsymbol{\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}$**（複号同順）において，最大値**$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

点$\boldsymbol{\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}$**（複号同順）において，最小値**$\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$

$\boxed{\text{問 11}}$

直方体の底面の辺の長さをx，高さをyとおく．

体積が一定であるから，$x^2y = c$（cは正の定数）とするときの，$S = 2x^2 + 4xy$の最小値を考えればよい．

$\varphi(x,\ y) = x^2y - c$とすれば

$\varphi_x = 2xy$，$\varphi_y = x^2$

また，$S_x = 4x + 4y$，$S_y = 4x$

よって，$\dfrac{4x + 4y}{2xy} = \dfrac{4x}{x^2}$ より，$x = y$

これを，$x^2y = c$に代入して

$x^3 = c$

$x > 0$より，これを満たすxはただ 1 つ存在する．

最小値が存在し，極値をとり得る点が 1 つであるから，この点が最小値を与える点である．

このとき，$y = x$であるから，半径と高さの比は

$x : y = x : x = \boldsymbol{1 : 1}$

$\boxed{\text{問 12}}$

（１）$f(x,\ y,\ \alpha) = (x-\alpha)^2 + (y-\alpha)^2 - 2$とおくと

$f_\alpha(x,\ y,\ \alpha) = -2(x-\alpha) - 2(y-\alpha)$

よって，包絡線の方程式は，次の 2 式からαを消去すればよい．

$$\begin{cases}(x-\alpha)^2+(y-\alpha)^2-2=0 & \cdots ① \\ -2(x-\alpha)-2(y-\alpha)=0 & \cdots ②\end{cases}$$

②より

$$-2x+2\alpha-2y+2\alpha=0$$

$$4\alpha=2x+2y$$

$$\alpha=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y$$

これを，①に代入して

$$\left(x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y\right)^2-2=0$$

$$\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y\right)^2+\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right)^2-2=0$$

$$\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}xy+\frac{1}{4}y^2+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}xy+\frac{1}{4}y^2-2=0$$

$$\frac{1}{2}x^2-xy+\frac{1}{2}y^2-2=0$$

$$\frac{1}{2}(x^2-2xy+y^2)-2=0$$

$$(x-y)^2-4=0$$

$$(x-y)^2=4$$

$$x-y=\pm 2$$

$$\boldsymbol{y=x\pm 2}$$

（2）$f(x,\ y,\ z)=\alpha x^2+\frac{1}{\alpha}-y$とおくと

$$f_\alpha(x,\ y,\ z)=x^2-\frac{1}{\alpha^2}$$

よって，包絡線の方程式は，次の 2 式からαを消去すればよい．

$$\begin{cases}\alpha x^2+\frac{1}{\alpha}-y=0 & \cdots ① \\ x^2-\frac{1}{\alpha^2}=0 & \cdots ②\end{cases}$$

②より

$$x^2=\frac{1}{\alpha^2}$$

$$\alpha^2=\frac{1}{x^2}$$

$$\alpha=\pm\frac{1}{x}$$

これを，①に代入して

$$\pm\frac{1}{x}\cdot x^2\pm\frac{1}{\frac{1}{x}}-y=0 \text{（複号同順）}$$

$$\pm x\pm x-y=0$$

$$\boldsymbol{y=\pm 2x}$$